TAMPEREEN YLIOPISTO

Funktion käsitteen opettaminen yliopisto- ja lukiomatematiikassa

Oppikirja-analyysi funktion käsitteen opettamisesta yliopistossa sekä lukion lyhyessä - ja pitkässä matematiikassa

Informaatiotieteiden yksikkö
Pro gradu -tutkielma
MARKO BLOMQVIST
Kesäkuu 2016

Tampereen yliopisto
Informaatiotieteiden yksikkö
MARKO BLOMQVIST: Funktion käsitteen opettaminen yliopisto- ja lukiomatematiikassa
Pro gradu -tutkielma, 67 sivua.
Matematiikka
Kesäkuu 2016

Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää kuinka funktion käsite opetetaan yliopistossa, lukion lyhyessä - sekä lukion pitkässä matematiikassa. Toteutin tutkimuksen analysoimalla eri tasojen oppimateriaaleja. Yliopistotason funktion opetuksen selvittämiseen käytin Johdatus diskreettiin matematiikkaan -oppikirjaa sekä Tampereen Yliopiston joukko-opin luentomonistetta syksyltä 2011. Lukion osalta sekä lyhyessä - että pitkässä matematiikassa analysoin kolmea eri kirjasarjaa, jotka pyrin valitsemaan eri kustantajilta. Lyhyen matematiikan osalta analysoin Lyhyt Matikka (Sanoma Pro), SIGMA (Tammi) sekä Kertoma! (Otava) -kirjasarjojen kursseja MAB1 Lausekkeet ja yhtälöt sekä MAB3 Matemaattisia malleja 1. Pitkän matematiikan osalta analysoin Pitkä Matematiikka (Sanoma Pro), Pitkä SIGMA (Sanoma Pro) sekä Laudatur (Otava) -kirjasarjojen kursseja MAA1 Funktiot ja yhtälöt sekä MAA2 Polynomifunktiot.

Selvitin Lukion opetussuunnitelmien perusteet 2003 asettamat tavoitteet ja keskeiset sisällöt edellä mainittujen kurssien osalta, jonka jälkeen analysoin oppikirjat. Tutkimuksesta ilmenee oppikirjojen luonteenomaisia eroja, mutta tutkimuksen kiinnostuksena on funktion käsitteen opettaminen matematiikan näkökulmasta. Käytin yliopistotason funktion käsitteen opettamista lähtökohtana täsmälliselle esitykselle funktion käsitteestä, johon peilasin lukiotason opetusta.

Yliopisto opettaa funktion olevan kuvaus kahden joukon välillä. Relaatio on järjestettyjen parien joukko, jossa jokaisessa järjestetyssä parissa ilmenee ennalta määrätty suhde, *relaation sääntö*. Jotta relaatio olisi kuvaus eli funktio, relaation jokaisen lähtöjoukon alkion $x \in X$ tulee olla yhden ja vain yhden arvojoukon alkion $y \in Y$ kanssa relaatiossa. Eli jokainen lähtöjoukon alkio kuvautuu yksikäsitteisesti arvojoukon alkiolle.

Lukion osalta tarkastellen tutkimus osoitti, että kirjasarjalla on merkitystä siihen, miten ja mitä funktion käsitteestä opetetaan. Funktion käsite opetettiin kirjasarjasta riippuen jopa eri kurssilla. Lyhyestä matematiikasta funktion käsitteen opetti MAB1-kurssilla vain Lyhyt Matikka -kirjasarja, kun taas SIGMA ja Kertoma! opettivat sen MAB3-kurssilla. Pitkässä matematiikassa Pitkä SIGMA ja Laudatur -kirjasarjat opettivat funktion käsitteen kurssilla MAA1, kun Pitkä Matematiikka -kirjasarja opetti sen vasta kurssilla MAA2.

Lyhyessä matematiikassa kaikille kirjasarjoille oli yhteistä, että ne opettavat funktiolla kuvattavan suureiden välistä riippuvuutta ja että funktion sääntö pyritään ilmoittamaan matemaattisella lausekkeella. Lyhyt Matikka -kirjasarja suhteutui funktioon välineenä, jolla ensisijaisesti toimittiin, kun taas SIGMA ja Kertoma! -kirjasarjoissa se oli enemmänkin päämäärä, jota kohti oltiin matkalla. Lyhyt Matikka kertoi funktion olevan sääntö, joka ilmaisee kuinka luvusta saadaan toinen luku. SIGMA ei opettanut funktion yleistä muotoa, mutta kirja kertoi funktion liittävän jokaiseen muuttujaan x täsmälleen yhden arvon y. Kertoma! opetti yleisen muodon käytännön tasolla, mutta ei abstraktilla relaation tasolla.

Pitkässä matematiikassa jokainen kirjasarja opetti funktion olevan yksikäsitteinen sääntö, mutta asian esittämisen matemaattisessa täsmällisyydessä oli eroja. Pitkässä matematiikassa täsmällisin ja samalla runsain kirjasarja funktion käsitteen osalta oli Laudatur. Pitkä SIGMA oli loogisin ja rakenteeltaan selkein kokonaisuus opettaen funktion käsitteestä kaiken tarpeellisen, jotta sen voi omaksua ja ymmärtää yleisellä tasolla, mutta ei enempää. Pitkä Matematiikka oli esitykseltään niukin ja rajasi funktion koskemaan vain lukuja ja esitteli funktion enemmänkin toiminnallisena välineenä, kuin kuvauksena kahden joukon välillä.

Tutkimuksen tärkein johtopäätelmä oli se, että vaikka kaikki kirjasarjat noudattivat samaa opetussuunnitelmaa, olivat tavat opettaa funktio jokaisessa kirjasarjassa erilainen. Näin ollen kirjasarjan valinta vaikuttaa oleellisesti tapaan, jolla funktio lukion lyhyessä matematiikassa kirjan avulla esitetään. Tästä johtuen opettajien tulee olla tietoisia niistä syistä, joiden takia valitsevat käyttämänsä kurssikirjat ja toisaalta niistä seurauksista, joita nämä valinnat mahdollisesti aiheuttavat oppilaiden matemaattisessa osaamisessa.

Avainsanat: suureiden välinen riippuvuus, lauseke, yksikäsitteinen sääntö, funktio

SISÄLLYS

1 JOHDANTO 5

2 FUNKTIO YLIOPISTOMATEMATIIKASSA 7

JOUKKO JA ALKIO 7
JÄRJESTETTY PARI 10
TULOJOUKKO 12
RELAATIO 13
FUNKTIO 15
FUNKTION OMINAISUUKSIA 17
Injektio, Surjektio ja Bijektio 17
Kasvaminen ja väheneminen (reaalifunktioilla) 19
Käänteiskuvaus 22
Yhdistetty kuvaus 23

3 FUNKTIO LUKION LYHYESSÄ MATEMATIIKASSA 25

SIGMA, TAMMI (2009 JA 2011, NYK. SANOMA PRO) 26
SIGMA 1 Lausekkeet ja yhtälöt (2009) 26
SIGMA 3 Matemaattisia malleja (2011) 27
LYHYT MATIKKA, SANOMA PRO (2013 JA 2015) 28
Lyhyt Matikka 1 Lausekkeet ja yhtälöt (2013) 28
Lyhyt Matikka 3, Matemaattisia malleja (2015) 29
KERTOMA!, OTAVA (2008 JA 2009) 29
Kertoma 1! Lausekkeet ja yhtälöt (2008) 29
Kertoma 3! Matemaattisia malleja 1 (2009) 30
YHTEENVETO FUNKTION KÄSITTEEN OPETTAMISESTA ERI KIRJASARJOILLA 32

4 FUNKTIO LUKION PITKÄSSÄ MATEMATIIKASSA 34

PITKÄ SIGMA (SANOMA PRO, 2014) 35
Pitkä SIGMA 1 Funktiot ja yhtälöt (2014) 35
Pitkä SIGMA 2 Polynomifunktiot (2014) 37
PITKÄ MATEMATIIKKA (SANOMA PRO, 2015 JA 2014) 38
Pitkä matematiikka 1 Funktiot ja yhtälöt (2015) 38
Pitkä matematiikka 2 Polynomifunktiot (2014) 39
LAUDATUR (OTAVA, 2005) 41
Laudatur 1 Funktiot ja yhtälöt (2005) 41
Laudatur 2 Polynomifunktiot (2005) 43
YHTEENVETO FUNKTION KÄSITTEEN OPETTAMISESTA ERI KIRJASARJOILLA 46

5 JOHTOPÄÄTÖKSET FUNKTION OPETTAMISESTA 51

FUNKTION OPETTAMINEN LYHYESSÄ MATEMATIIKASSA 51
FUNKTION OPETTAMINEN PITKÄSSÄ MATEMATIIKASSA 52

6 POHDINTAA ERI KIRJASARJOISTA 55

LYHYT MATEMATIIKKA 55
SIGMA 55
Lyhyt Matikka 56
Kertoma! 59
PITKÄ MATEMATIIKKA 60
Pitkä SIGMA 60
Pitkä matematiikka 61

Laudatur *62*
7 FUNKTIO VUODEN 2015 OPETUSSUUNNITELMASSA **63**
LYHYT MATEMATIIKKA 63
PITKÄ MATEMATIIKKA 64
8 LÄHTEET **66**

1 JOHDANTO

> *”Matemaattisen analyysin keskeinen käsite on funktio. Sen pohjana on latinan verbi* fungere*, joka tarkoittaa 'toimia'. Funktio-sanaa käytetään matematiikan ulkopuolella yleismerkityksessä 'tehtävä'. Matemaattisen erityismerkityksen tälle sanalle otti käyttöön 1600-luvun lopulla Leibniz, toinen differentiaali- ja integraalilaskennan keksijöistä.”*
>
> — Helsingin yliopiston matematiikan dosentti, entinen Maanpuolustuskorkeakoulun lehtori Matti Lehtinen Solmu-lehdessä 1/1998/1999

Kuten edellä Matti Lehtinen on kuvannut funktion käsitettä käytettävän arkikielessä esimerkiksi kuvaamaan tehtävää tai toimintoa, myös Tieteen kansallinen termipankki määrittelee kirjallisuudentutkimuksen saralla funktion tarkoittamaan toimintaa tai tehtävää [18]. Arkikielessä funktio yhdistetäänkin usein juuri vaikkapa asunnon eri huoneiden funktioihin, eli toiminnallisiin tarkoituksiin. Esimerkkinä sanottakoon tupakeittiö, jonka funktio on toimia yleisenä seurustelutilana samalla, kun laitetaan ruokaa.

Vuoden 2003 Lukion opetussuunnitelmien perusteissa sana funktio esiintyy 51 kertaa. Äidinkielenomaisen ruotsin kielen viidennellä kurssilla Opiskelu ja työ (RUÄO5) harjoitellaan työelämälle tyypillisiä kielenkäyttötilanteita ja funktioita [2, 89]. Loput 50 mainintaa tulevat matematiikan saralta. Vuoden 2015 perusteissa funktio esiintyy 67 kertaa, joista 64 lukeutuu matematiikan alle. Vuoden 2015 perusteet määrittää kurssien Tekstit ja vuorovaikutus (SÄI1, RÄI1 ja OÄI1) yhdeksi keskeiseksi sisällöksi tekstilajit funktionaalisina tuotteina. Tällä tarkoitetaan sitä, että tekstilajit pyrkivät kertomaan, kuvaamaan, ohjaamaan, ottamaan kanta tai pohtimaan asioita. [11, 260; 266; 274.] Eli tekstilajeilla on jokin tehtävä. Vaikka arkikielessä, kielitieteissä ja lukion eri kielikurssien sisällöissä funktiolla tarkoitetaan jotain toimintoa tai tehtävää, tarkoitetaan matematiikassa funktion käsitteellä jotain aivan muuta.

Paitsi opetussuunnitelmien funktion käsitteen mainintojen lukumäärät puhuvat sen puolesta, että kyseessä on tärkeä matematiikan käsite, myös eri oppikirjat, kuten mm. Pitkä SIGMA 1 [12, 100] ja SIGMA 3 [10, 17] korostavat funktion merkittävyyttä sanomalla, että se on yksi matematiikan keskeisimmistä käsitteistä. Vaikka se on keskeinen käsite, sitä ei ole juurikaan tutkittu koulu- tai lukiokontekstissa. Vuonna 2013 Jyväskylän yliopistossa valmistui Jenna Hiltusen matematiikan pro gradu -tutkielma: Tapaustutkimus funktion käsitteen oppimisesta tutkivan matematiikan keinoin. Tutkimus toteutettiin viidellä 7.-luokkalaisella.

Funktion käsitteeseen sekoittuu arkielämän merkityksiä. Lisäksi se on nykyään merkittävä matematiikan käsite ja ollut käytössä aina 1600-luvulta lähtien. Aiemmin ei ole tutkittu funktion käsitteen opettamista lukion oppikirjoissa. Näin ollen on tullut aika tutkia ja selvittää mitä funktion käsitteestä ja toisaalta miten funktion käsite opetetaan lukion lyhyessä - ja pitkässä matematiikassa. Jotta päästään puhumaan lukiotason funktion käsitteen opettamista, on tarpeen määritellä matemaattisesti täsmällisesti mitä funktion käsite tarkoittaa. Näin ollen aloitan tutkimukseni tarkastelemalla, kuinka funktion käsite opetetaan yliopistossa.

2 FUNKTIO YLIOPISTOMATEMATIIKASSA

Jotta päästään puhumaan funktion käsitteestä yliopistomatematiikassa, meidän on ensin määriteltävä käsitteet joukko, järjestetty pari ja relaatio.

Joukko ja alkio

Yliopistomatematiikan perusopetuksessa käsitteeseen joukko lähestytään intuitiivisen joukko-opin mukaisesti tarkastelemalla yksittäisiä olemassa olevia alkioita, jotka joko kuuluvat johonkin tiettyyn joukkoon tai eivät kuulu [1, 47]. Nämä edellä mainitut joukkoon kuuluvat alkiot muodostavat siis tarkasteltavan joukon. Jos alkio x kuuluu joukkoon A ollen siis joukon A alkio, niin tapaus merkitään $x \in A$. Jos taas x ei kuulu joukkoon A, niin tällöin merkitään $x \notin A$. Joukko, johon ei kuulu yhtään alkiota on tyhjä joukko ja sen kohdalla käytetään merkintää $\emptyset$ [1, 23].

Määritelmä 2.1 [1, 48]
Kaksi joukkoa ovat samat, jos niiden alkiot ovat täsmälleen samat. Siis

$$A = B \iff \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Äärellinen joukko voidaan esittää luettelemalla sen kaikki alkiot, kuten $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, jolloin aaltosulkeiden sisällä olevat alkiot muodostavat tarkasteltavan joukon. Myös tyhjä joukko voidaan merkitä luettelemalla sen kaikki alkiot, jolloin merkitään { }.

Määritelmä 2.2
Tarkastellaan joukkoa A. Nyt mikä hyvänsä sellainen joukko B, jonka kaikki alkiot ovat myös A:n alkiota, on A:n osajoukko. Tällöin merkitään $B \subseteq A$. Siis

$$B \subseteq A \iff \forall x(x \in B \Rightarrow x \in A).$$

Näin ollen joukko B sisältyy joukkoon A ja A sisältää joukon B. Jos $B \subseteq A$, mutta $B \neq A$, niin B on A:n aito osajoukko, joka merkitään $B \subset A$. [1,49.]

Lause 1.

Olkoot A, B ja C joukkoja. Tällöin on voimassa

(r) $A \subseteq A$ (refleksiivisyys)

(as) jos $A \subseteq B$ ja $B \subseteq A$, niin $A = B$ (antisymmetrisyys)

(t) jos $A \subseteq B$ ja $B \subseteq C$, niin $A \subseteq C$ (transitiivisuus)

Lauseen todistus on seuraava.

(r) Seuraa suoraan määritelmistä 2.1 ja 2.2 sillä on ilmeistä, että mielivaltainen joukon A alkio on joukon A alkio.

(as) Seuraa suoraan määritelmistä 2.2 ja 2.1. Joukko A on joukon B:n osajoukko, joten kaikki joukon A alkiot kuuluvat myös joukkoon B. Koska B on myös A:n osajoukko, niin kaikki B:n alkiot kuuluvat myös A:han. Näin ollen mielivaltainen x, joka kuuluu jompaankumpaan joukkoon, kuuluu sekä joukkoon A että B. Toisin sanottuna, jokainen alkio kuuluu joukkoon A jos ja vain jos se kuuluu joukkoon B.

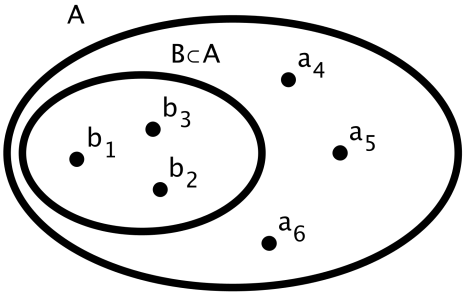
(t) *Oletus*. $A \subseteq B$ ja $B \subseteq C$. *Väite*. $A \subseteq C$.

Valitaan mielivaltainen alkio $x \in A$. Koska $A \subseteq B$, niin $x \in B$. Edelleen koska $B \subseteq C$, niin $x \in C$. Näin ollen mikä tahansa joukon A alkio on myös joukon C alkio.

■

Transitiivisuuden perusteella voidaan kirjoittaa $A \subseteq B \subseteq C$ tarkoittamaan sitä, että $A \subseteq B$ ja $B \subseteq C$. Transitiivisuuden osalta aito osajoukko käyttäytyy samalla tavalla, joten vastaava merkintätapa $A \subset B \subset C$ on käytössä. [1, 49.]

Kaksi joukkoa A ja B voivat olla toinen toistensa osajoukot, kun $A = B$ (ks. antisymmetrisyys, Lause 1). Tällöin $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$. Toisaalta joukko voi olla toisen joukon aito osajoukko, kun $A \neq B$ (ks. Kuvio 1).



KUVIO 1. Venn-diagrammiin on kuvattu A ja sen aito osajoukko B. Huomaa, että kaikki B:n alkiot kuuluvat myös joukkoon A.

Esimerkki 1.
”Perheeni” on 6 alkion joukko, johon sisältyy 2 alkion osajoukko ”Kissat” ja 4 alkion osajoukko ”Ihmiset”.

Edellä kuvattiin tapa esittää joukko luettelemalla erikseen sen kaikki alkiot. Toinen tapa merkitä joukko on ilmoittaa sen alkioiden yhteinen määrittelevä ominaisuus. Tällöin joukko merkitään $\{x \in X \mid p(x)\}$, jossa tarkasteltava joukko muodostuu niistä joukon X alkioista, joilla on ominaisuus p. [1, 48.]

Määritelmä 2.3
Joukkoa määrittelevää yhteistä ominaisuutta kutsutaan predikaatiksi, eli avoimeksi lauseeksi, jonka totuusarvo riippuu muuttujasta [1, 22].

Esimerkki 2.
$p(x) = "x + 4 = 5"$ on predikaatti eli avoin lause, joka voi olla joko tosi tai epätosi riippuen siihen valitusta muuttujan arvosta. Muuttujan arvon ollessa 1 lause on tosi, mutta muuttujan arvon ollessa 2 lause on epätosi. Näin ollen $p(1)$ on tosi. Nyt siis luku 1 kuuluu predikaatin määrittämään joukkoon, mutta luku 2 ei. Edelleen $p(x)$ eli predikaatti p muuttujalla x on yhtälö, jolle luku 1 muodostaa sen ratkaisujoukon.

Esimerkki 3.
$q(x) = "x\ on\ kissa"$. Tässä yhteydessä muuttujan paikalle ei ole mielekästä sijoittaa lukuarvoa,

joten itse asiassa predikaatin totuusarvoa ratkaistessa olennaista on predikaatin perusjoukko ja edelleen määrittelyjoukko.

Yleensä sovitaan, että tarkasteltavien predikaattien määrittelyjoukkona on koko perusjoukko X. Toisinaan kuitenkaan koko perusjoukkoa ei voida ottaa huomioon tarkastelussa. Tällöin perusjoukkoa on pienennettävä määrittelyjoukon avulla ja tämä määrittelyjoukko on mainittava tarkasteluja tehdessä. [1, 51.]

Määritelmä 2.4

Määrittelyjoukolla tarkoitetaan sitä joukkoa, josta predikaatin muuttujan arvo valitaan [1, 22].

Esimerkki 2:n $p(x)$:n määrittelyjoukko voisi olla vaikka kokonaislukujen joukko ja esimerkissä 3 $q(x) = "x\ on\ kissa"$ esimerkistä 1 tuttu joukko ”Perheeni”, jolloin predikaatti on arvolla $q(Lyyti)$ yksiselitteisesti tosi, mutta arvolla $q(Marko)$ epätosi.

Esimerkki 4.

”Tamperelaiset” voidaan ajatella olevan perusjoukko eli tarkasteltava avaruus *X*, jolloin ”Perheeni” muodostaa oman osajoukkonsa tästä perusjoukosta. Nyt kuitenkin predikaatin $q(x) = "x\ on\ kissa"$ kanssa voi tulla ristiriita tarkasteltaessa koko avaruuden kaikkia alkiota, eli kaikkia tamperelaisia. Tässä tapauksessa joku muu Lyyti-niminen voi olla ihminen tai jopa koira. Näin ollen nimenä Lyyti ei ole yksikäsitteinen esimerkkipredikaatin suhteen, jolloin määrittelyjoukko on tarpeen ilmoittaa, kun mietitään avoimen lauseen totuusarvoa.

Järjestetty pari

Joukosta puhuttaessa sellaisenaan sen alkioiden järjestyksellä ei ole merkitystä. Myöskään saman alkion usea esiintyminen ei muuta kyseistä joukkoa eli esimerkiksi $\{1,1,3\} = \{1,3\}$. [1, 67]. Kuitenkin on olemassa myös sellaisia tapauksia, jolloin alkioiden järjestyksellä on merkitystä. Tästä esimerkkinä vaikkapa kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$, jossa 1 edeltää 2:ta jne. Tällaisesta järjestyksellisestä kahden alkion oliosta käytetään nimitystä järjestetty pari ja se merkitään (x, y). Näin ollen jos $x \neq y$, niin $\{x, y\} = \{y, x\}$, mutta $(x, y) \neq (y, x)$. [1,67.]

Määritelmä 2.5.

Järjestetty pari määritellään siten, että $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Eli järjestetty pari (x, y) tarkoittaa sellaista joukkoa, jonka alkiot ovat $\{x\}$ ja $\{x, y\}$.

On myös tärkeää huomata, että $\{x, x\} = \{x\}$, mutta $(x, x) \neq (x)$, missä oikea puoli tarkoittaa jonoa, jossa ensimmäisellä ja ainoalla paikalla on x. [1, 67.]

Lause 2. [todistuksen alkuperäinen idea: 3, 17]

Olkoot (x, y) ja (u, v) järjestettyjä pareja. Tällöin pätee ekvivalenssi

$$(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow x = u \wedge y = v.$$

Todistus.

$\Leftarrow$ Jos $x = u \wedge y = v$, niin $(x, y) = (x, y) = (u, v)$.

$\Rightarrow$

Järjestetyn parin määritelmän 2.5 mukaan $(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow \big\{\{x\}, \{x, y\}\big\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$.

Oletetaan ensin, että $x = y$.

Tällöin $(x, y) = (x, x) = \big\{\{x\}, \{x, x\}\big\} = \{\{x\}\}$.

Nyt siis $\big\{\{x\}\big\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$.

Eli määritelmän 2.1 mukaan $\{x\} = \{u\} \wedge \{x\} = \{u, v\}$,

jolloin $x = u \wedge x = (u = v)$,

jolloin $x = u = v\ (= y)$.

Oletetaan sitten, että $x \neq y$.

Tällöin $\big\{\{x\}, \{x, y\}\big\} = \big\{\{u\}, \{u, v\}\big\}$.

Nyt määritelmän 2.1 mukaan $\{x\} \in \big\{\{u\}, \{u, v\}\big\}$ ja $\{x, y\} \in \big\{\{u\}, \{u, v\}\big\}$.

Nyt siis joko

$\{x\} = \{u\}$ tai $\{x\} = \{u, v\}$ ja

$\{x, y\} = \{u\}$ tai $\{x, y\} = \{u, v\}$.

On siis olemassa neljä eri tapausta, jotka voisivat toteuttaa määritelmän 2.1 mukaisen ehdon:

1° $\{x\} = \{u\} \wedge \{x, y\} = \{u, v\}$

2° $\{x\} = \{u\} \wedge \{x, y\} = \{u\}$

3° $\{x\} = \{u, v\} \wedge \{x, y\} = \{u\}$

4° $\{x\} = \{u, v\} \wedge \{x, y\} = \{u, v\}$

Kuitenkaan tapaukset 2°- 3° eivät voi olla tosia oletuksen $x \neq y$ vuoksi.

4° $\{x\} = \{u, v\} \land \{x, y\} = \{u, v\}$

Nyt määritelmän 2.1 mukaan jos $\{x\} = \{u, v\}$, niin $x = u = v$.

Edelleen jos $\{x, y\} = \{u, v\}$, niin edellisen rivin perusteella myös $\{x, y\} = \{x\}$,

jolloin määritelmän 2.1 perusteella $x = y$,

mikä on ristiriidassa oletuksen $x \neq y$ kanssa.

1° $\{x\} = \{u\} \land \{x, y\} = \{u, v\}$

Nyt määritelmän 2.1 mukaan jos $\{x\} = \{u\}$, niin $x = u$.

Edelleen koska oletuksen mukaan $x \neq y$ ja koska edellisen rivin perusteella $x = u$,

niin jotta $y \in \{u, v\}$, tulee olla $y = v$.

Näin ollen $\{x\} = \{u\} \land \{x, y\} = \{u, v\} \Longrightarrow x = u \land y = v$.

■

Järjestetyn parin käsite voidaan yleistää järjestetyn n-jonon käsitteeksi. Käsitteelle pätee Lauseen 2. luonnollinen yleistys, jolloin jono $(x_1, \dots, x_n)$ ja jono $(y_1, \dots, y_n)$ ovat samat joss $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$.

Tulojoukko

Määritelmä 2.6.

Joukkojen A ja B tulojoukko on

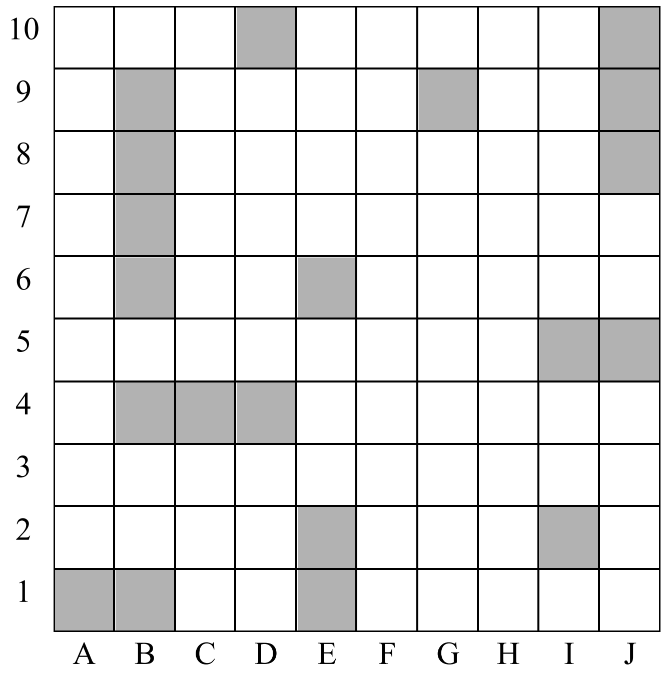
$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \land y \in B\}.$$

Toisin sanottuna tulojoukko $A \times B$ muodostuu kaikista niistä järjestetyistä pareista (x, y), joilla $x \in A$ ja $y \in B$. [1, 68.] Tulojoukko voidaan laskea myös useammalla kuin kahdella joukolla, jolloin vastaavasti määritellään

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(x_1, \dots x_n) | x_1 \in A_1 \land \dots \land x_n \in A_n\}$$

Esimerkki 6.

Kahden joukon muodostama tulojoukko voidaan havainnollistaa geometrisesti tasokoordinaatistossa, jossa eri joukot muodostavat omat koordinaattiakselinsa. Kenties tutuin tulojoukon sovellus on laivanupotuspeli, jossa meren, eli tulojoukon määräävät joukot $A = \{A, B, \dots, J\}$ ja $B = \{1, 2, \dots, 10\}$ (ks. Kuvio 2).



KUVIO 2. Laivanupotuspelin meren muodostaa kahden joukon tulojoukko eli järjestettyjen parien joukko.

Esimerkki 7.
Kolmen joukon tulojoukosta esimerkkinä olkoon joukko $\mathbb{R}^3$ ollen järjestettyjen reaalilukukolmikoiden joukko, jonka geometrinen vastine on kolmiulotteinen avaruus. [1, 69.]

Relaatio

Relaation käsitettä voisi lähteä avaamaan johtamalla sanasta englanninkielinen ilmaus *relation*, joka tarkoittaa suhdetta. Relaatio onkin sellainen joukko, jonka jokaisessa alkiossa ilmenee ennalta määritelty suhde. Relaation jokainen alkio on järjestetty pari [3,18]. Suhde voi olla vaikka opettaja-oppilas-suhde. Tällöin $Marko$ ja $Maija$ ovat opettaja-oppilas-suhteessa, eli tarkasteltavassa relaatiossa keskenään ja siis kuuluvat relaatioon ollen sen alkio. Relaatio voidaan ajatella myös lakina, jota sen alkiot noudattavat. Näin ollen järjestetyt parit, jotka noudattavat relaation lakia, kuuluvat relaatioon.

Määritelmä 2.7. [1, 70-71.]

Jos $R \subseteq X \times Y$ $(X, Y \neq \emptyset)$, niin sanotaan, että R on relaatio joukkojen X ja Y välillä. Voidaan myös sanoa, että R on relaatio X ja Y välillä ja edelleen R on relaatio joukosta X joukkoon Y. X on relaation lähtöjoukko ja Y maalijoukko. Alkiot $x \in X$ ja $y \in Y$ ovat keskenään relaatiossa R eli $R(x, y)$ on voimassa jos ja vain jos $(x, y) \in R$. Näin ollen relaatio R on järjestettyjen parien joukko, joka muodostuu niistä alkiosta, joilla on tarkasteltava keskinäinen suhde eli relaatio. Nyt voidaan merkitä xRy, kun $R(x, y)$ on voimassa. Siis

$$xRy \Leftrightarrow R(x, y) \Leftrightarrow (x, y) \in R.$$

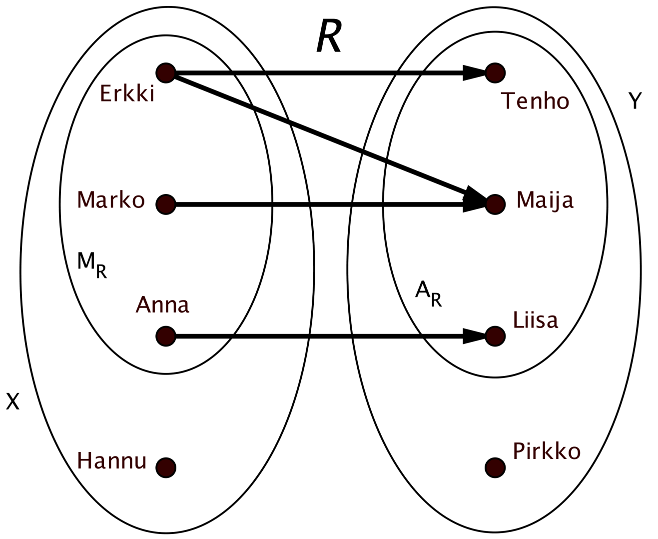
Tällaista relaatiota kutsutaan kaksipaikkainen relaatioksi ja on myös mahdollista määritellä useampi kuin kaksipaikkainen relaatio. Se määritellään vastaavasti, jolloin joukkojen $X_1, \dots, X_n$ $(\neq \emptyset)$ välisellä relaatiolla R tarkoitetaan osajoukkoa $R \subseteq X_1 \times \dots, \times X_n$ ja $R(x_1, \dots, x_n)$ on voimassa, jos ja vain jos $(x_1, \dots, x_n) \in R$. [1, 70.]

Relaation $R \subseteq X \times Y$ määrittelyjoukoksi M_R sanotaan sitä lähtöjoukon X osajoukkoa, jonka alkiot kuuluvat relaatioon R. Toisin sanottuna jokaiselle määrittelyjoukon alkioille $x \in M_R$ löytyy ainakin yksi relaation määräämä pari joukosta Y.

$$M_R = \{x \in X \mid \exists y \in Y : xRy\}.$$

Relaation määräämää joukon Y osajoukkoa sanotaan relaation arvojoukoksi A_R, eli

$$A_R = \{y \in Y \mid \exists x \in X : xRy\}. \text{ [1, 70.]}$$



KUVIO 3. Relaatiolla on laki. $xRy \Leftrightarrow x\ opettaa\ y\text{:}tä$.

Esimerkki 7.

Kuvion 3 lähtöjoukon X muodostaa koulun henkilökunta ja maalijoukon Y oppilaat. M_R on relaation määrittelyjoukko ja *Hannu* ei kuulu siihen, koska hän on talonmies eikä siis opeta ketään. Arvojoukon A_R muodostaa kolmannen luokan oppilaat, joihin ei kuulu ensimmäisen luokan *Pirkko*. *Marko* ja *Anna* opettavat vain omaa luokkaansa, kun taas *Erkki* opettaa oman luokkansa lisäksi elämänkatsomustietoa, jossa hän opettaa myös *Markon* oppilasta *Maijaa*. Nyt siis $R = \{(Erkki, Tenho), (Erkki, Maija), (Marko, Maija), (Anna, Liisa)\}$.

Funktio

Määritelmä 2.8.

Relaatiota kutsutaan kuvaukseksi eli funktioksi f joukolta X joukkoon Y $(X, Y \neq \emptyset)$ silloin kun se liittää joukon X jokaiseen alkioon täsmälleen yhden joukon Y alkion [1, 107]. Jotta relaatio on kuvaus eli funktio, sen pitää toteuttaa kaksi ehtoa. Ensinnä sen lähtöjoukon ja määrittelyjoukon tulee olla samat

(1) $$M_f = X$$

eli

(1) $$\forall x \in X: \exists y \in Y: (x, y) \in f,$$

ja toiseksi mikään $x \in X$ ei saa olla relaatiossa kuin yhden alkion $y \in Y$ kanssa

(2) $$(x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2.$$

Näistä kahdesta edellisestä ehdosta seuraa, että ollakseen funktio relaation lähtöjoukon jokaisen alkion $x \in X$ tulee olla yhden ja vain yhden arvojoukon alkion $y \in Y$ kanssa relaatiossa. Siis ottamalla käyttöön kvanttorin ∃! tarkoittamaan ”on olemassa yksikäsitteinen” voidaan ehdot 1 ja 2 esittää yhtenä ehtona

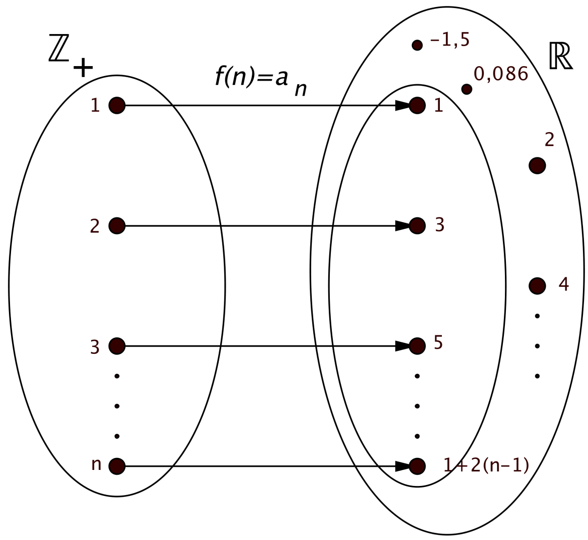
(1,2) $$\forall x \in X : \exists!\, y \in Y : (x, y) \in f.$$

Funktio f liittää jokaisen määrittelyjoukon alkion x yksikäsitteisesti jonkin arvojoukon alkion y kanssa. Tämä tarkoittaa sitä, että kuvaus f muuttujalla x saa arvon y. Tämä merkitään $f(x) = y$. [1,107.]

Esimerkki 8.

Lukujono on kuvaus positiivisilta kokonaisluvuilta reaaliluvuille $f: \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$. Yleensä lukujonoille käytetään merkintää $f(n) = a_n$. Olkoon lukujonon yleinen termi $a_n = 1 + 2(n-1)$.

Nyt $f(1) = 1, f(2) = 3$, $f(3) = 5$ ja $f(n) = 1 + 2(n-1)$. Kaikki lähtöjoukon alkiot ovat relaatiossa yksikäsitteisesti jonkin maalijoukon alkion kanssa, joten relaatio on kuvaus eli funktio. Funktion arvojoukoksi muodostuu parittomat luonnolliset luvut.



KUVIO 4. Esimerkin 8 lukujono kuvattuna nuolikuviona.

Funktion ominaisuuksia

Edellä funktio määriteltiin yleisesti järjestettyjen parien joukkona. Seuraavaksi tarkastellaan millaisia perusominaisuuksia funktiolla voi olla.

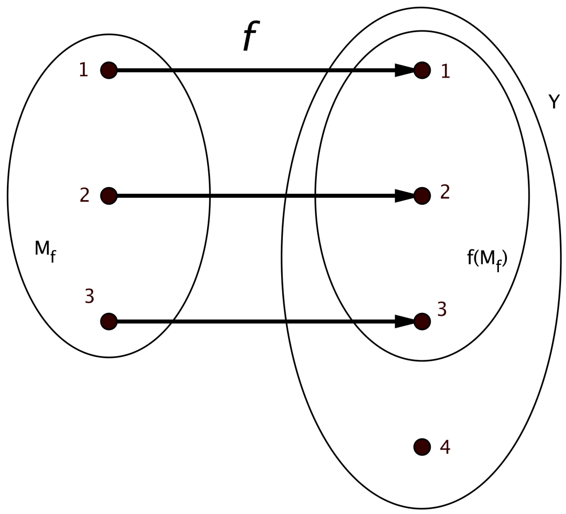
Injektio, Surjektio ja Bijektio

Määritelmä 2.9.

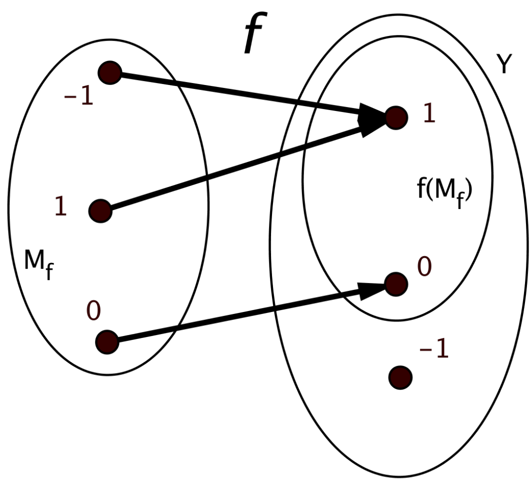
Funktio $f: X \to Y$ on injektio, jos eri määrittelyjoukon alkiot kuvautuvat eri arvojoukon alkioille eli

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Toisin sanottuna jokainen maalijoukon kuva on korkeintaan yhden määrittelyjoukon alkion kuva. [1, 114.]



KUVIO 5. Injektio eli injektiivinen funktio f.

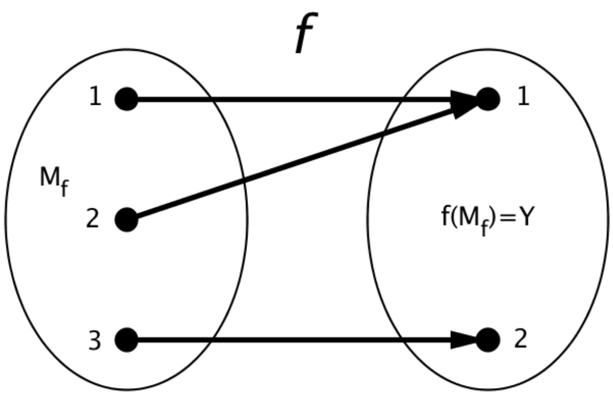


KUVIO 6. Ei-injektiivinen funktio f.

Määritelmä 2.10.
Funktio $f: X \to Y$ on surjektio, jos sen maalijoukko on sama kuin arvojoukko.

$$\forall y \in Y: \exists x \in X: y = f(x).$$

Kuvaus on siis surjektio, jos sen maalijoukon jokainen alkio on ainakin yhden määrittelyjoukon alkion kuva. [1, 114.] Toisin sanottuna samalle arvojoukon alkiolle voi kuvautua useampi määrittelyjoukon piste.



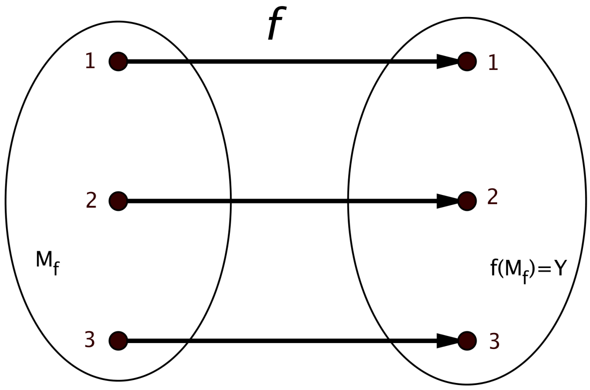
KUVIO 7. Surjektio eli surjektiivinen funktio f.

Määritelmä 2.11.

Funktio $f: X \to Y$ on bijektio, jos se on sekä injektio, että surjektio. Eli funktiolla pätee ehto

$$\forall y \in Y: \exists!\, x \in X: y = f(x)$$

Toisin sanoen jokainen maalijoukon alkio on täsmälleen yhden määrittelyjoukon alkion kuva. [1, 114.]



KUVIO 8. Bijektio eli bijektiivinen kuvaus f.

Kasvaminen ja väheneminen (reaalifunktioilla)

Reaalilukujen funktioon $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kuuluvista järjestetyistä pareista voi tuottaa kuvaajan koordinaatistoon. Tällöin järjestetty pari toimii pisteen koordinaatteina (x, y) ja kyseinen koordinaatisto on xy-koordinaatisto. Kuvaajan avulla voidaan tutkia funktion kasvavuutta ja vähenevyyttä toisin sanottuna funktion kulkusuuntaa. Usein kasvavuutta ja vähenevyyttä tutkitaan jollakin tietyllä reaalilukuvälillä I. Väli I voi olla suljettu -, avoin - tai puoliavoin väli ja se voi olla hyvinkin rajattu, kuten esimerkiksi avoin väli $]1,2[$ tai esimerkiksi kattaen kaikki ei-negatiiviset reaaliluvut ollen puoliavoin väli $[0, \infty[$.

Määritelmä 2.12.

Reaalifunktio f on aidosti kasvava, jos

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

ja aidosti vähenevä, jos

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Toisin sanoen, jos funktio saa sitä suurempia arvoja, mitä suurempi arvo muuttujalle valitaan, funktio on aidosti kasvava ja jos funktio saa sitä pienempiä arvoja, mitä suurempi arvo muuttujalle valitaan, on funktio tällöin aidosti vähenevä. Edelleen sellaista funktiota, joka on koko määrittelyjoukollaan joko aidosti kasvava tai aidosti vähenevä sanotaan aidosti monotoniseksi. Aidosti monotonisen funktion kuvaaja ei siis vaihda kulkusuuntaansa. [1,115.]

Lause 4.

Välillä I määritelty jatkuva reaalifunktio f on injektio jos ja vain jos se on aidosti monotoninen.

Todistus.

$\Leftarrow$ Oletus: f on aidosti monotoninen. Väite: f on injektio.

Olkoot $x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$. Oletuksesta seuraa, että jos $x_1 < x_2$, niin $f(x_1) < f(x_2)$, jos f on aidosti kasvava ja vastaavasti $f(x_1) > f(x_2)$, jos f on aidosti vähenevä.

Vastaavasti tapauksessa, jossa $x_1 > x_2$, niin $f(x_1) < f(x_2)$, jos f on aidosti vähenevä ja vastaavasti $f(x_1) > f(x_2)$, jos f on aidosti kasvava. Kaikissa tapauksissa $f(x_1) \neq f(x_2)$, joten f on injektio.

$\Rightarrow$ Oletus: f on injektio. Väite: f on aidosti monotoninen.

Tehdään vastaoletus, että f ei ole aidosti monotoninen.

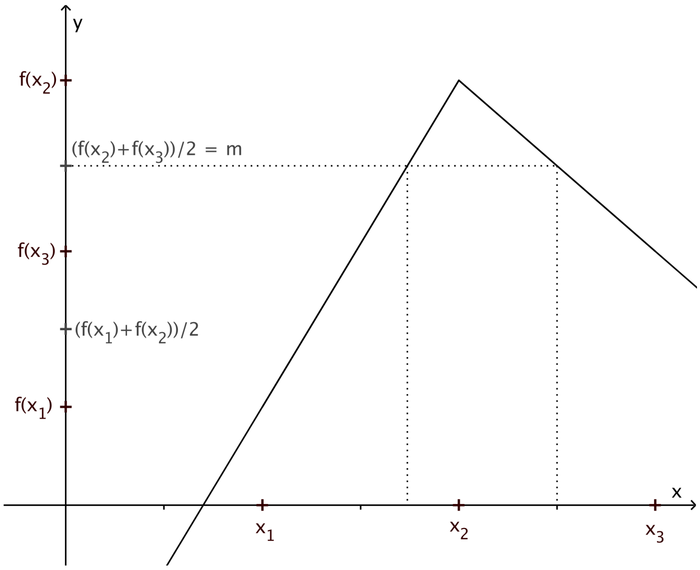
Tällöin on olemassa sellaiset $x_1,\ x_2,\ x_3 \in I$, että $x_1 < x_2 < x_3$ ja

joko $f(x_1) \leq f(x_2) \geq f(x_3)$ *tai* $f(x_1) \geq f(x_2) \leq f(x_3)$.

Koska oletetaan f injektiiviseksi, yhtäsuuruutta ei hyväksytä. Tällöin

$f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$ *tai* $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$.

Oletetaan aluksi, että $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$. Valitaan m siten, että se on suurempi luvuista $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ ja $\frac{f(x_3)+f(x_2)}{2}$. Jatkuvana funktiona f saa välillä $]x_1, x_2[$ välille $]f(x_1), f(x_2)[$ kuuluvat arvot ja välillä $]x_2, x_3[$ välille $]f(x_3), f(x_2)[$ kuuluvat arvot. Nyt koska funktio saa arvon m molemmilla väleillä $]x_1, x_2[$ ja $]x_2, x_3[$ ja koska $x_1 < x_2 < x_3$, niin f saa arvon m (ainakin) kahdella eri x:n arvolla, joten se ei ole injektio. (ks. Kuvio 9.)



KUVIO 9. Lauseen 4 todistuksen havainnointi yksinkertaisimmassa muodossaan.

Jos $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$, niin todistus etenee samalla tavalla, mutta tarkasteltavat välit ovat $]f(x_2), f(x_1)[$ ja $]f(x_2), f(x_3)[$ ja vastaavassa kuviossa ”huippu” on alhaalla. Kummassakin tapauksessa vastaoletus johtaa ristiriitaan oletuksen kanssa, joten se on väärä ja f on aidosti monotoninen.

■

Lause 5.

Jatkuva funktio $f: I \to \mathbb{R}$, missä I on väli, on surjektio, jos ja vain jos se saa mielivaltaisen suuria ja mielivaltaisen pieniä arvoja.

Todistus.

$\Leftarrow$ Oletus. f saavuttaa mielivaltaisen suuria ja pieniä arvoja. Väite. f on surjektio.

Olkoon $y \in \mathbb{R}$. Oletuksen mukaan f saavuttaa jonkin y:tä suuremman ja pienemmän arvon. Valitaan $M > y$ ja $m < y$. Jatkuvana funktiona f saa kaikki välin $]m, M[$ arvot, joten koska y on tältä väliltä, niin f saa myös arvon y. Siis f on surjektio.

$\Rightarrow$ Oletus. f on surjektio. Väite. f saa mielivaltaisen suuria ja pieniä arvoja.

Koska f saa kaikki reaaliarvot, niin väite on tosi.

■

Näin ollen lauseiden 4 ja 5 nojalla voidaan todeta, että bijektiot ovat jollain välillä I aidosti monotonisia ja ne saavat mielivaltaisen suuria tai pieniä arvoja.

Käänteiskuvaus

Olkoon $f\colon X \to Y$ kuvaus, jolloin

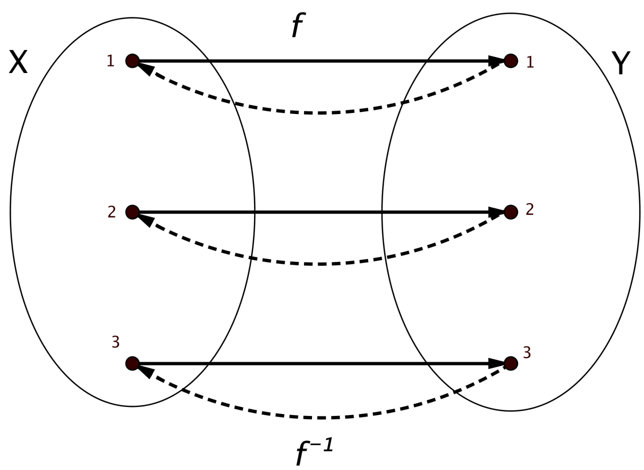
$$f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}.$$

Jos tämä kuvaus on bijektio, niin jokaista $y \in Y$ vastaa täsmälleen yksi sellainen $x \in X$, että $y = f(x)$. Tällöin kuvaukselle on olemassa käänteiskuvaus $f^{-1}\colon Y \to X$, joka on myös bijektio.

Määritelmä 2.13. [1,119.]
Bijektion $f\colon X \to Y$ käänteiskuvaus on $f^{-1}\colon Y \to X$, joka määritellään seuraavasti:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Jokaiselle relaatiolle on olemassa käänteisrelaatio, mutta kaikki käänteisrelaatiot eivät suinkaan ole kuvauksia (ks. Määritelmä 2.8).



KUVIO 10. Kuvaus f sen käänteiskuvaus f^{-1}.

Esimerkki 10.
Olkoon $f\colon X \to Y$ kuvaus, jonka laki on $5x + 2$, eli $f(x) = 5x + 2$.
Kuvaus on määritelty koko reaalilukujen joukossa.

Käänteiskuvauksen määritelmän mukaan on siis olemassa $f^{-1}: Y \rightarrow X$ siten, että $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

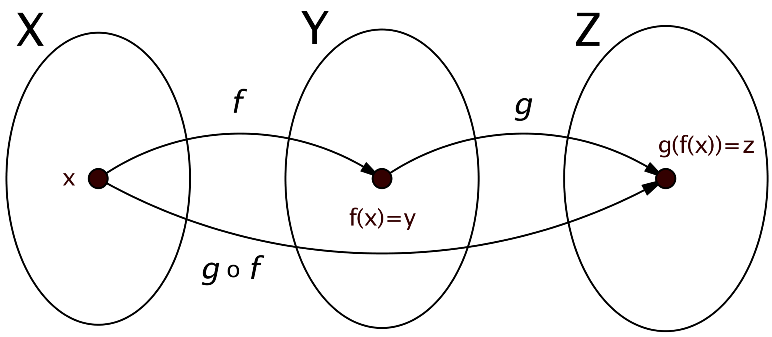
Nyt siis $f(x) = 5x + 2 \Leftrightarrow$

$$y = 5x + 2 \Leftrightarrow$$
$$y - 2 = 5x \Leftrightarrow$$
$$\frac{y-2}{5} = x \Leftrightarrow$$
$$\frac{y-2}{5} = f^{-1}(y) \Leftrightarrow$$

$f^{-1}(y) = \frac{y-2}{5}$, joka on funktion f käänteiskuvaus.

Yhdistetty kuvaus

Määritelmä 2.14.
Kuvausten $f: X \rightarrow Y$ ja $g: Y \rightarrow Z$ yhdistetty kuvaus eli kuvaustulo on kuvaus $g \circ f: X \rightarrow Z$, joka määritellään $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ [1, 120].



KUVIO 11. Yhdistetty kuvaus $(g \circ f)(x) = g(f(x)$ [1, 120].

Yhdistetty kuvaus $g \circ f: X \rightarrow Z$ saadaan siis siten, että ensin alkio $x \in X$ kuvataan kuvauksella *f*, jonka jälkeen $f(x) = y \in Y$ kuvataan kuvauksella *g* tuottaen arvon $g(f(x)) = z \in Z$.

Vastaavasti määritellään useamman kuin kahden kuvauksen yhdistäminen. Kuvausten

$$f_1: X_0 \rightarrow X_1$$
$$f_2: X_1 \rightarrow X_2$$

$$\vdots$$

$$f_n : X_{n-1} \to X_n$$

yhdistetty kuvaus on kuvaus $f_n \circ f_{n-1} \cdots \circ f_1 : X_0 \to X_n$, jonka laki on

$$(f_n \circ \cdots \circ f_1)(x) = f_n\left(f_{n-1}\left(\dots\left(f_2\big(f_1(x)\big)\right)\right)\right).$$

Lause 6.

Yhdistetty kuvaus, eli kuvaustulo noudattaa liitännäisyyttä. Koska

$$\big(h \circ (g \circ f)\big)(x) = h\big((g \circ f)(x)\big) = h\left(g\big(f(x)\big)\right) = (h \circ g \circ f)(x)$$

ja

$$\big((h \circ g) \circ f\big)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h\left(g\big(f(x)\big)\right) = (h \circ g \circ f)(x)$$

niin

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f.$$

Siis suoraan kuvaustulon määritelmästä 2.17 seuraa, että liitännäisyys on voimassa.

■

Sen sijaan sen todistaminen, että vaihdannaisuus ei ole voimassa, käy yksinkertaisen esimerkin avulla.

Esimerkki 11.

Olkoot $f(x) = x + 2$ ja $g(x) = 2x$. Näin ollen $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ ja $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Nyt, kun $x = 2$, niin

$$(g \circ f)(2) = g\big(f(2)\big) = \big(g(4)\big) = 8$$

ja

$$(f \circ g)(2) = f\big(g(2)\big) = f(4) = 6.$$

Selvästi

$$8 \neq 6$$

Siis

$$(g \circ f)(2) \neq (f \circ g)(2) \Leftrightarrow (g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$$

Eli vaihdannaisuus ei ole voimassa.

■

3 FUNKTIO LUKION LYHYESSÄ MATEMATIIKASSA

Nyt olen esittänyt, kuinka yliopistomatematiikka opetti funktion relaationa, jolla on tietyt ominaisuudet. Relaatio on funktio, eli kuvaus, kun jokainen lähtöjoukon alkio on relaatiossa vain yhden arvojoukon alkion kanssa. Jotta yliopistossa päästiin tutkimaan funktioita, tuli lähteä liikkeelle joukko-opista määritellen ensin alkio, järjestetty pari ja lopulta ymmärtää funktio joukkojen välisenä relaationa muodostaen oman joukkonsa, jonka alkioina on järjestettyjä pareja. Seuraavaksi selvitän, kuinka lukion lyhyen matematiikan oppikirjat lähestyvät funktion käsitettä.

Lukion lyhyen matematiikan ensimmäisen kurssin MAB1 Lausekkeet ja yhtälöt tavoitteena on saada oppilas ymmärtämään lineaarisen riippuvuuden, verrannollisuuden ja toisen asteen polynomifunktion käsitteet sekä vahvistaa hänen taitojaan yhtälöiden ratkaisemisessa ja saada hänet oppimaan toisen asteen yhtälöiden ratkaiseminen [2,125]. Keskiössä luonnollisestikin on peruskäsitteiden ymmärtäminen sekä niihin liittyvien taitojen harjaannuttaminen. Keskeisiä sisältöjä kurssilla ovat mm. suureiden välinen lineaarinen riippuvuus ja verrannollisuus, yhtälöiden graafinen ja algebrallinen ratkaiseminen, ratkaisujen tulkinta ja arvioiminen sekä toisen asteen polynomifunktio ja toisen asteen yhtälön ratkaiseminen [2, 125.]. Kurssin sisällöt vastaavat kurssin tavoitteita ja selkeästi funktion käsite kuuluu kurssiin.

MAB3 Matemaattisia malleja 1 -kurssin tavoitteina opetussuunnitelman perusteissa mainitaan, että oppilas näkee reaalimaailman ilmiöissä säännönmukaisuuksia ja riippuvuuksia ja kuvaa niitä matemaattisilla malleilla ja edelleen tottuu arvioimaan mallien hyvyyttä ja käyttökelpoisuutta [2, 126]. Toisin sanottuna funktioiden ja yhtälöiden ratkaisemisesta on siirrytty jo niiden soveltamiseen osana elämää. Tätä tulkintaa tukee myös kurssin keskeiset sisällöt, joihin kurssilla luetaan lineaarisen ja eksponentiaalisen mallin soveltaminen, potenssiyhtälön ratkaiseminen sekä eksponenttiyhtälön ratkaiseminen logaritmin avulla [2, 126].

Tutustumalla lukion oppikirjoihin saataneen vastaus kysymykseen, kuinka lukion lyhyessä matematiikassa lähestytään funktion käsitettä. Käyn läpi kirjasarjoittain, kuinka MAB1-kurssi opettaa mitä funktiolla tarkoitetaan, tai ainakin sen mitä perusominaisuuksia se pitää sisällään ja millaisia perustaitoja funktioilla operointiin vaaditaan. Sekä sen, miten eri kirjasarjat esittävät asiat funktioiden soveltamiseen keskittyvässä kurssissa MAB3 Matemaattisia malleja 1. En tule käymään erityisen tarkasti läpi kaikkia kurssien sisältöjä, mutta poimin joitain mielenkiintoisia huomioita eri kirjasarjoista liittyen funktion käsitteeseen. Kirjasarjat ovat SIGMA (Tammi, 2011 alkaen Sanoma Pro), Lyhyt Matikka (Sanoma Pro) ja Kertoma! (Otava) ja ne valikoituivat osaksi tutkimusta sen takia, että edustavat eri kustannusyhtiöitä.

SIGMA, Tammi (2009 ja 2011, nyk. Sanoma Pro)

SIGMA 1 Lausekkeet ja yhtälöt (2009)

SIGMA 1 -kirja ei esittele ollenkaan funktion käsitettä varsinaisessa kurssiosuudessa, vaan nostaa sen esiin vasta Ekstra-osuudessa kirjan takana [8, 146-151]. Kirja kuitenkin opettaa funktioon liittyviä asioita aloittaen lukujoukoista [8, 7]. Lukujoukoista siirrytään murtoluvuilla laskemiseen [8, 18]. Seuraavaksi opiskellaan potenssit laskusääntöineen [8, 24-34], minkä jälkeen kirjassa esitellään lauseke ja laskutoimitukset [8, 35-43].

Kirja määrittelee käsitteet lauseke, muuttuja, lausekkeen arvo ja termi. Lisäksi kirja opettaa lausekkeiden yhteen-, vähennyslaskun sekä lausekkeen kertomisen ja jakamisen jollain luvulla. Tämän jälkeen kirja esittelee polynomin käsitteen [8, 44], kun sillä osataan jo operoida ja sen summalausekeominaisuus on jo tuttu. Polynomimerkintä $P(x) = x^2 + x + 1$ esitellään ja sen yhteydessä kerrotaan, että polynomille voidaan antaa nimi P, joka näkyy em. merkinnässä polynomin muuttujan x ohella. Lisäksi kirja esittelee lausekkeita, jotka eivät ole polynomeja. [8, 45.] Seuraavaksi kirjassa harjoitellaan polynomien kanssa vastaavia laskutoimituksia kuin aikaisemmin lausekkeiden yhteydessä [8, 46-53]. Nyt esitellään murtolausekkeen ja lausekkeen sieventäminen [8, 54].

Seuraavaksi kirjassa tutustutaan yhtälöihin ja se kertoo, että kun kaksi lauseketta merkitään yhtä suuriksi, syntyy yhtälö [8, 61]. Yhtälöosuus esittelee ensimmäisen asteen yhtälön, vaillinaisen toisen asteen - sekä täydellisen toisen asteen yhtälön [8, 61-90; 4, 71-101]. Seuraavana aiheena on suhde ja verranto [8, 91-106; 4, 102-116]. Aihepiirissä tutustutaan kahden luvun tai suureen väliseen riippuvuuteen. Looginen jatke suhteelle on prosenttilaskenta [8, 107-128; 4, 117-144]. Lopuksi kirjassa on kertausosio sekä Ekstra-osio, jossa vasta esitellään polynomifunktion käsite [8, 146].

SIGMA 3 Matemaattisia malleja (2011)

Kirja aloittaa johdattelemalla matemaattisten mallien pariin kertomalla, että malleilla kuvataan erilaisia riippuvuuksia [10, 6]. Ensimmäinen luku, Mallintaminen koordinaatistossa [10, 7-30] aloittaa kertomalla, että kaksiulotteisella koordinaatistolla tarkoitetaan useimmiten suorakulmaista xy-koordinaatistoa [10, 9]. Luku määrittelee myös pisteen ja kahden pisteen määräämän janan pituuden sekä kertoo, että käyrät ovat xy-tason muodostamia joukkoja, joita voidaan kuvata käyrän yhtälön avulla. [10, 9-12.]

Seuraava asia kirjassa on funktio, josta kirja jatkaa, että se on yksi matematiikan keskeisimpiä käsitteitä ja sitä tarvitaan, kun tutkitaan suureiden välisiä riippuvuuksia. Kahden suureen, esimerkiksi makeisten määrä (kg) ja makeispussin hinnan, välistä riippuvuutta pyitään kuvaamaan matemaattisella lausekkeella, minkä kerrotaan tekevän riippuvuuden tarkastelusta helpompaa. Kirjan esimerkissä kilo karkkia maksaa 9,50€. Näin ollen pussin hinta noudattaa lauseketta $9{,}50x$. Merkinnöistä kirja kertoo, että riippuvuuksista puhumista helpottamaan, riippuvuutta kuvaavalle säännölle, eli funktiolle annetaan nimi, esimerkiksi *f*. Nimen perässä ilmoitetaan, mikä lausekkeessa olevista kirjaimista on funktion muuttuja. Esimerkkifunktion muuttuja on makeisten määrä. Lopuksi on symbolikielellä annettu funktio $f(x) = 9{,}50x$, jonka yhteydessä funktion eri osat on nimetty. [10, 17.]

Seuraavalla sivulla funktiosta on tehty tietolaatikko, jossa kerrotaan, että funktio liittää jokaiseen muuttujan x arvoon täsmälleen yhden arvon y. Tämä merkitään $y = f(x)$. Kirja jatkaa kertomalla, että funktion arvo saadaan laskemalla sijoittamalla muuttujan paikalle funktion sääntöön jokin arvo. Tällöin saadaan laskettua funktion arvo $f(x)$ kohdassa x. Jos muuttujan arvoa merkitään kirjaimella x ja funktion arvoa $f(x)$ kirjaimella y, saadaan lukupari (x, y), jota vastaava piste voidaan sijoittaa koordinaatistoon. Tällä tavalla saadaan näkyviin funktion graafinen esitys eli funktion kuvaaja. [10, 18.] Kuvaajien merkityksestä kerrotaan, että niillä voidaan kuvata paljon tietoa tiiviissä ja havainnollisessa muodossa, minkä takia on tärkeää osata lukea ja tulkita kuvaajia [10, 21]. Viimeinen asia funktioista on sen nollakohta, joksi kutsutaan sitä kohtaa, jossa funktion kuvaaja leikkaa x-akselin. Tässä kohdassa funktion arvo on nolla eli $f(x) = 0$. Kirja käy läpi esimerkit funktioista, joilla on yksi, ei ole yhtään, ja on kolme nollakohtaa. Nollakohtien määrittämisen kerrotaan tapahtuvan yleensä algebrallisesti eli laskemalla, mutta samalla kerrotaan, että graafisesti, kuvaajalta katsomalla saadaan arvioitua funktion nollakohta. [10, 22.]

Kirjan toinen luku keskittyy suoran ominaisuuksiin ja lineaariseen riippuvuuteen lineaarisen mallin avulla [10, 31-71]. Funktion käsitettä ei käytetä luvussa lainkaan. Luvussa tutkitaan suoran yhtälön avulla suoriin liittyviä asioita hyvin kattavasti. Loput aihealueet kirjassa ovat eksponentiaalinen malli ja eksponenttifunktio [10, 72], jota seuraa eksponenttiyhtälö ja eksponenttiyhtälön sovelluksia [10, 81-95.] Viimeiset asiat kirjassa ovat potenssiyhtälö sekä eksponenttifunktion merkitystä matemaattisena mallina [10, 96-114].

Lyhyt Matikka, Sanoma Pro (2013 ja 2015)

Lyhyt Matikka 1 Lausekkeet ja yhtälöt (2013)

Kirja aloittaa prosentilla, mitä se tarkoittaa ja miten sillä voidaan operoida [5, 4-22]. Kirja kertoo, että prosenttia käytetään ilmaisemaan suhteellisia osuuksia [5, 5]. Seuraavaksi kirjassa tarkastellaan suureiden keskinäistä riippuvuutta [5, 23], mikä onkin jo selvästi lähempänä funktion käsitettä. Idea on tutustuttaa opiskelija hyvin käytännönläheisissä asioissa taulukoimaan sekä merkitsemään *xy*-koordinaatistoon kahden suureen arvoja. Melkein kaikissa laskuissa toisena suureena on hinta. Esimerkiksi tehtävissä tutkitaan kuinka ajetut kilometrit vaikuttavat skootterin vuokrahintaan. Eli vuokrahinta riippuu ajetuista kilometreistä.

Kirjan seuraava aihe on lineaarinen funktio $f(x) = ax + b$. Kirja esittelee ensin funktion f koneena, joka tuottaa koneeseen syötetystä luvusta uuden luvun sääntönsä mukaan. [5, 30]. Seuraavaksi kirjassa on lyhyt teoriaosuus funktiosta, jossa kerrotaan, että funktio on sääntö, joka ilmaisee, kuinka luvusta saadaan toinen luku, funktion arvo. Lisäksi kirja esittelee merkintätavan, että jos sääntö on *f* ja syötetty luku a, niin näin saatua arvo merkitään *f(a)*. *f(a)* onkin funktion *f* arvo kohdassa a. Tämän jälkeen kirjassa seuraa luonnollisen kielen esimerkki ”funktio h kertoo luvun 4:llä ja vähentää tulosta luvun 6”. Kirja jatkaa symbolikielellä, että sääntö voidaan ilmoittaa lausekkeella $h(x) = 4x - 6$. [5, 31.]

Seuraavaksi kirja avaa tarkemmin lineaarisen funktion tarkoittamaan funktiota, jonka kuvaaja on suora. Kirja jatkaa, että mikäli kerroin a on eri suuri kuin nolla, niin lauseke $ax + b$ on ensimmäisen asteen polynomi, jolloin funktiota kutsutaan myös ensimmäisen asteen polynomifunktioksi. Lisäksi kertoimen a merkki vaikuttaa onko suora nouseva vai laskeva. [5, 35.] Funktion nollakohdaksi kutsutaan kohtaa, jossa funktion arvo on nolla [5, 36].

Seuraavaksi kirjassa harjoitellaan ensimmäisen asteen yhtälön ratkaiseminen, joka on hyödyllinen taito mm. selvitettäessä laskemalla funktion nollakohta [5, 40]. Seuraava aihe kirjassa on polynomilausekkeen käsittely, jossa mielenkiintoisin huomio kiinnittyy kielentämistehtävään heti ensimmäisellä sivulla [5, 47], jossa pitää keksiä laskuun liittyvä tarina ja päätellä tulos. Laskuksi on annettu lauseke ”$(3a + 5b) + (2a + b) =$” ja kuvana on vieressä hedelmävati, jossa banaaneja ja appelsiineja. Näin ollen kirja ohjaa opiskelijaa ajattelemaan polynomin termit banaaneina ja appelsiineina, joiden yhteenlasku keskenään ei liene kovin mielekästä – ainakaan ilman tehosekoitinta. Mekaanisen polynomien ratkaisemisen jälkeen kirjassa seuraa pitkähkö yhtälöosio, jossa opetellaan ratkaisemaan yhtälöitä ja tutustutaan suoraan ja kääntäen verrannollisiin suureisiin [5, 55-73]. Viimeinen asia kirjassa on toisen asteen funktio ja toisen asteen yhtälö [5, 74-103]. Osiossa kirja määrittelee käsitteet ja käy niiden ominaisuuksia, sekä neliöyhtälön ratkaisemisen, josta päästään toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan. Ratkaisukaavaa ei johdeta ollenkaan, vaan se otetaan annettuna, joka löytyy myös symbolisesta laskimesta sellaisenaan, mikä on ymmärrettävää lyhyen matematiikan tavoitteet silmällä pitäen.

Lyhyt Matikka 3, Matemaattisia malleja (2015)

Kirja esittelee heti uuden asian, kulmakertoimen [6, 4]. Kirja ei puhu funktiosta mitään, vaan lineaarisesta riippuvuudesta, mikä sekin on uusi käsitepari. Se liittyy olennaisesti funktion käsitteeseen, mutta vaatii lukijalta aika paljon matemaattista ymmärrystä osata yhdistää nämä käsitteet. Seuraava aihe on suoran yhtälö, jossa mukaan tulee funktio. Esimerkissä muodostetaan lineaariselle funktiolle kuvaaja, joka on suora. Tälle suoralle muodostetaan yhtälö siten, että muuttuja on pisteen x-koordinaatti ja funktion arvo, $f(x)$ pisteen y-koordinaatti [6, 22]. Kuitenkaan merkintää $f(x) = y$ ei esitetä. Seuraavan kerran funktio mainitaan sivulla 90, kun aiheena on eksponenttifunktio. Tässä välissä kirja jatkaa syventämällä tietoutta suoriin liittyvistä laskutoimituksista ilman arkielämän esimerkkejä. Sanallisissa tehtävissä on kuitenkin paljon arkielämään liittyviä suoranmuodostustehtäviä.

Kertoma!, Otava (2008 ja 2009)

Kertoma 1! Lausekkeet ja yhtälöt (2008)

Kirja aloittaa [9, 4], että matematiikkaa opitaan ymmärtämään tutkimalla, toimimalla, kokeilemalla ja **kertoma**lla. Kirjan nimi pitääkin sisällään myös merkityksen kirjantekijöiden oppimiskäsityksestä. Ensimmäinen luku [9, 7-13] pitää sisällään erilaisia matematiikan työvälineitä, kuten kirjoittaminen matematiikan kielelle, matematiikan kielen lukeminen, algoritmin käyttäminen ja jopa todistaminen matematiikassa jne.

Toisessa luvussa on aiheena luvut [9, 14-23]. Luku esittelee erilaisia lukujoukkoja, kuten luonnolliset-, kokonais- ja rationaaliluvut. Lisäksi kirja esittelee alkuluvun käsitteen. Luvun pääpaino on muistuttaa, kuinka eri luvuilla, erityisesti murtoluvuilla operoidaan. Kolmas luku [9, 24-

35] keskittyy prosenttilaskennan perusteisiin. Luvussa esiintyy matemaattinen käsite, suhde [9, 25]. Neljäs luku, potenssi [9, 36-45], käsittelee potenssin määritelmän kertolaskun kautta, potenssien laskusäännöt, tilanteen, jossa eksponenttina on nolla sekä negatiivisen eksponentin. Tässä luvussa esitellään myös reaalilukujen joukko [9, 42]. Reaaliluvut tulevat ajankohtaiseksi neliö- ja kuutiojuuren yhteydessä [9, 43-44].

Kirja on nyt käynyt läpi peruslaskutoimitukset yksittäisillä luvuilla. Näin ollen seuraavan luvun [9, 48-57] otsikko onkin lauseke. Kirja kertoo, että ”lauseke on merkitty laskutoimitus”. Lisäksi lausekkeessa voi olla muuttuja, jolloin lausekkeelle voidaan laskea arvoja sijoittamalla muuttujan paikalle eri arvoja. [9, 49.] Seuraavaksi kirja esittelee polynomin, summalausekkeen. Lisäksi kerrotaan, että murtolauseke ei ole polynomi eli kertoo, että tietynlaista lauseketta kutsutaan polynomiksi. Polynomien yhteen- ja vähennyslasku sekä kerto- ja jakolasku esitellään [9, 50-53]. Polynomista seuraava asia onkin jo polynomifunktio [9, 54]. Kirja kertoo, että ”polynomifunktio on funktio, jonka lauseke on polynomi”. Polynomifunktio voidaan nimetä kirjaimella, kuten esimerkiksi P. Sille voidaan laskea arvo sijoittamalla muuttujan arvo polynomin lausekkeeseen. Näin saadaan selville muuttujan arvo -polynomin arvo -lukupareja. Polynomifunktion kuvaaja voidaan piirtää sijoittamalla laskemalla saadut lukuparit *xy*-koordinaatistoon. Lopuksi luvun teoriaosuudessa [9, 55] esitellään polynomifunktion nollakohtien selvittäminen graafisesti ja algebrallisesti sekä annetaan esimerkki toisen asteen polynomifunktiosta, jolla on kaksi nollakohtaa. Tämän funktion kuvaajaa kutsutaan paraabeliksi.

Kertoma 3! Matemaattisia malleja 1 (2009)

Kirjassa on tuttu rakenne ja ensimmäinen käsittelee jälleen matematiikan työvälineitä [7, 6-17]. Luvussa kerrataan MAB1-kurssin sisältöjä ja palautetaan mieleen mallintamisessa tarvittavia työvälineitä, kuten mm. kuvaamisen *xy*-koordinaatistossa, eri arvojen taulukoimisen sekä lausekkeen ja funktion arvon laskemisen. Luku 2 aloittaa pohtimalla kirjasarjalle tyypilliseen tapaan matemaattisen mallin merkitystä. Kirjassa [7, 19] luetellaan esimerkinomaisesti, kuinka matemaattisia malleja voidaan käyttää mm. fysiikassa, biologiassa, lääketieteessä ja esim. sosiologian tilanteissa.

Kirja paneutuu funktion käsitteeseen kertomalla, että funktio kuvaa tietylle muuttujalle yksikäsitteisen arvon [7, 24]. Esimerkkinä funktiosta kirja esittää jokaiselle suomalaiselle annetun yksikäsitteisen henkilötunnuksen. Tällöin funktion muuttujina ovat kaikki suomalaiset ja arvoina kaikki suomalaisten henkilötunnukset. Tämän jälkeen kirja [7, 25] kertoo tarkemmin, kuinka funktio voidaan nimetä ja kertaa polynomifunktion lausekkeen olevan polynomi. Kirja jatkaa luonnollisella kielellä, miten esimerkkipolynomifunktio $f(x) = 2x + 1$ kuvaa sääntöä, jossa muuttuja kerrotaan kahdella ja tuloon lisätään yksi. Kirja jatkaa [7, 26], että funktio voidaan esittää monella eri tavalla, kuten lausekkeena, taulukoimalla arvoja sekä kuvaajana tai sanallisena sääntönä. Kirja käyttääkin niin symboli-, kuvio- kuin myös luonnollista kieltä opettaessaan funktion käsitettä. Tämän teoriaosuuden pohdintatehtävä on seuraavanlainen:

> *"Keksi esimerkkejä, jotka määrittävät sinun ja ryhmäsi jäsenille funktion. Keksi myös sääntöjä, jotka eivät toteuta funktion ehtoa." [7, 26.]*

Tehtävä pakottaa opiskelijan miettimään, mitkä olivatkaan ne ominaisuudet, jotka tekevät kahden asian välisestä yhteydestä funktion. Myös negatiivinen tehtävä, jossa tulee keksiä sääntöjä, jotka eivät toteuta funktion ehtoa, pakottaa opiskelijan mieltämään funktion käsitteen perusolemuksen yksikäsitteisenä yhteytenä kahden eri olion välillä. Luvun teoriaosuuden lopussa kerrotaan, kuinka verrannollisuudessa esiintyvää suureiden välistä riippuvuutta voidaan kuvata funktion avulla [7, 30].

Luvussa 2 opetettiin funktion käsite yleisellä tasolla ja todettiin että se voidaan esittää luonnollisen kielen avulla, taulukoimalla arvoja, lausekkeena tai esittää koordinaatistossa. Luku 3 [7, 38-69] keskittyy tarkastelemaan lineaarisia polynomifunktioita [7, 39]. Erityisesti ko. funktion kuvaajaan, suoraan keskitytään. Luku ei laajenna ymmärrystä funktion käsitteeseen liittyen, mutta syventää ensimmäisen asteen polynomifunktion kuvaajaan (suoraan) liittyvää tietoutta. Luvussa esitellään kulmakerroin ja sen vaikutus suoran nousevuuteen ja laskevuuteen [7, 40-41]. Lisäksi mm. suoran suuntakulma esitellään [7, 43] ja suoran yhtälö, suoran ja koordinaattiakselien leikkauspisteet, suorien yhdensuuntaisuus ja kohtisuoruus sekä suorien leikkauspiste käydään tarkasti läpi [7, 45-66].

Luku 4 [7, 70-89] keskittyy lineaarisen mallin tuottamiseen ja tulkintaan graafisesti ja algebrallisesti. Kirjassa kerrotaan, miten lineaarisella mallilla voidaan matemaattisesti mallintaa tapauksia, joissa kahden suureen välistä riippuvuus on lineaarista. Kuvaaja on tällöin suora. Kirja nivoo yhteen käsitteet suora ja suoran yhtälö $y = kx + b$, ensimmäisen asteen polynomifunktio, lineaarinen funktio $f(x) = kx + b$ sekä suureiden x ja y välinen lineaarinen riippuvuus. [7, 71-72.] Kirja jatkaa luvussa 5 [7, 90-99] toisen asteen polynomifunktion, eli paraabelin tarkastelulla. Kirjan loppu pitää sisällään potenssi- ja eksponenttiyhtälöt [7, 100-111], eksponentiaalisen mallin [7, 112-131] sekä luvun, jossa käsitellään koko kurssilla esiintyneiden mallien vaativampia sovelluksia [7, 132-147].

Yhteenveto funktion käsitteen opettamisesta eri kirjasarjoilla

Edellä kuvasin tarkasti, kuinka kolme eri kirjasarjaa lähestyivät ja käsittelivät funktion käsitettä lukion lyhyessä matematiikassa. Kirjasarjoissa oli selviä eroja. SIGMA-sarja opetti ja otti käyttöön funktion käsitteen vasta MAB3-kurssilla. SIGMA 1:n, MAB1-kurssikirjassa funktio käytiin läpi kirjan lopussa Ekstra-osiossa. Koko MAB1-kurssi luo pohjaa funktion käsitteen ymmärtämiselle käyden läpi lukujoukot, luvuilla laskeminen, lausekkeen ja sen laskutoimitukset sekä polynomin. Toisaalta kirja jatkaa lausekkeista yhtälöön, edelleen suhteeseen ja verrantoon ja lopulta prosenttiin.

SIGMA 3 -kirja aloittaa johdattelemalla matemaattisen mallin merkitykseen kuvatessa asioiden keskinäisiä riippuvuuksia. Tämän jälkeen kirja opettaa koordinaatistoon liittyvät perusasiat pisteineen ja akseleineen. Seuraavaksi kirja opettaa funktion käsitteen riippuvuutta kuvaavana sääntönä, jolle pyritään muodostamaan matemaattinen lauseke. Funktion kerrotaan liittävän jokaiseen muuttujan x arvoon täsmälleen yhden arvon y. Funktion kuvaajan esittäminen koordinaatistossa sekä funktion nollakohta opetetaan. Loppu kirjasta keskittyy lineaarisen riippuvuuden ja suoran väliseen yhteyteen ja keskittyy tämän esittämiseen ja tulkintaan koordinaatistossa sekä eksponentiaaliseen malliin eksponenttifunktioineen.

Lyhyt Matikka 1 ottaa funktion käsitteen keskeiseksi kurssin sisältöalueeksi, mitä kautta tutustutaan muihin kurssin sisältöihin. Funktion käsite on prosentin, eli suhteen ja riippuvuuden lisäksi lähtökohta kurssille. Lähtökohta verrattuna SIGMA-sarjaan on siis täysin päinvastainen. Kirjan tapa esitellä funktio on hyvin toimintakeskeinen ja funktio esitetään ikään kuin fysiikan välineenä, jolla voidaan kuvata käytännössä suureiden välistä riippuvuutta. Esimerkkinä annetaan mm. pilailuvälineiden myynti korotetun hinnan funktiona. Lyhyt Matikka 3 ei käsittele funktion käsitettä enää uudelleen, vaan luottaa MAB1-kurssilla tehtyyn työhön. Kirja syventää funktioihin liittyvää tietoa eksponenttiyhtälöllä.

Kertoma1!-kirja aloittaa muistuttamalla matematiikan työvälineistä, kuten mm. eri kielillä matemaattisten asioiden tarkastelua sekä taulukoinnin ja lukusuoran käyttämisen merkitystä matematiikan kannalta. Näiden perusasioiden jälkeen kirjassa siirrytään lukujen maailmaan, jossa käydään läpi lukujoukkoja ja kerrataan erityisesti murtoluvuilla laskeminen. Murtoluvun jälkeen esitellään suhde ja edelleen prosentti. Seuraava aihe kirjassa on potenssi, josta päästään reaalilukuihin. Nyt kirjassa on käyty läpi peruslaskutoimitukset yksittäisillä luvuilla ja toisaalta on opittu muodostamaan kahden luvun välinen suhde. Seuraava luonnollinen aihe onkin peruslaskutoimituksista rakentuva lauseke ja polynomi. Polynomin jälkeen esitellään polynomifunktio. Kirja ei kuitenkaan kerro tarkkaan ottaen mikä funktio on.

Kertoma3!-kirja jatkaa siitä mihin Kertoma1! jäi kertaamalla arvojen taulukoinnin ja esittämisen koordinaatistossa sekä lausekkeen - ja funktion arvon laskemisen. Tämän jälkeen kirja määrittelee funktion käsitteen, siten että funktio kuvaa tietylle muuttujalle yksikäsitteisen arvon. Tässä kohdassa funktio määritellään yleisesti ja esimerkkinä käytetään suomalaisten ja henkilötunnusten joukkoja, jotka ovat funktiossa keskenään. Seuraavaksi kirja rajaa funktion tarkastelun koskemaan erityisesti polynomifunktioita ja kertoo, kuinka sama funktio voidaan ilmoittaa lausekkeena, taulukoimalla arvoja sekä kuvaajana tai sanallisena sääntönä. Edelleen kirja jatkaa, että funktiolla voidaan kuvata suureiden välistä riippuvuutta. Kirjan 3. luku keskittyy suoraan ja sen ominaisuuksiin sekä syventää ensimmäisen asteen polynomifunktioon liittyvää tietoutta. Luku 4 yhdistää opitut käsitteet suora, suoran yhtälö, ensimmäisen asteen polynomifunktio, lineaarinen funktio sekä suureiden x ja y välinen lineaarinen riippuvuus. Kirjan loppu laajentaa funktion koskemaan myös toisen asteen polynomifunktiota ja esittelee eksponentiaalisen mallin sekä pitää sisällään soveltavia tehtäviä liittyen matemaattiseen mallintamiseen.

4 FUNKTIO LUKION PITKÄSSÄ MATEMATIIKASSA

Edellä kuvasin kuinka yliopistomatematiikassa funktio ajatellaan olevan relaatio, jolla on tietyt ominaisuudet. Lyhyessä matematiikassa puhuttiin funktion kohdalla koneesta, joka tuottaa koneeseen syötetystä luvusta uuden luvun sääntönsä mukaan [5, 30] tai siitä, että funktio kuvaa tietylle muuttujalle yksikäsitteisen arvon [7, 24]. Lisäksi funktiota kerrottiin tarvittavan silloin kun tutkitaan suureiden välistä riippuvuutta, jolloin funktio liittää jokaiseen muuttujan x arvoon täsmälleen yhden arvon y [10, 18]. Seuraavaksi selvitän, miten funktion käsite käsitellään lukion pitkässä matematiikassa. Aloitan tarkastelemalla lukion 2003 opetussuunnitelmaa pitkän matematiikan osalta.

Lukion pitkän matematiikan kaksi ensimmäistä kurssia, MAA1 Funktiot ja yhtälöt sekä MAA2 Polynomifunktiot ovat funktion käsitteen oppimisen kannalta pitkässä matematiikassa oleellisimmat kurssit. MAA1-kurssin tavoitteena on, että opiskelija vahvistaa yhtälön ratkaisemisen ja prosenttilaskennan taitojaan, syventää verrannollisuuden, neliöjuuren ja potenssin käsitteiden ymmärtämistään, tottuu käyttämään neliöjuuren ja potenssin laskusääntöjä sekä oppii ratkaisemaan potenssiyhtälöitä. Lisäksi kurssin tavoite on, että opiskelija syventää funktiokäsitteen ymmärtämistään tutkimalla potenssi- ja eksponenttifunktioita. Keskeisinä sisältöinä opetussuunnitelma luettelee potenssifunktion, potenssiyhtälön ratkaisemisen, juuret ja murtopotenssin ja eksponenttifunktion. [2, 119.] Opetussuunnitelmaa tarkastelemalla välittyy ajatus, että opiskelijoiden tulisi jo osata funktion käsite. Vain yksi MAA1-kurssin tavoitteista puhuu funktion käsitteestä ja sekin funktiokäsitteen ymmärtämisen syventämisenä tutkimalla potenssi- ja eksponenttifunktioita.

MAA2-kurssin kohdalla opetussuunnitelma listaa tavoitteiksi, että opiskelija harjaantuu käsittelemään polynomifunktioita, oppii ratkaisemaan toisen asteen polynomiyhtälöitä ja tutkimaan ratkaisujen lukumäärää. Lisäksi opiskelijan tulisi oppia ratkaisemaan korkeamman asteen polynomiyhtälöitä, jotka voidaan ratkaista ilman polynomien jakolaskua sekä oppia ratkaisemaan yksinkertaisia polynomiepäyhtälöitä. Keskeiset sisällöt kurssilla ovat polynomien tulo ja binomikaavat, polynomifunktio, toisen ja korkeamman asteen polynomiyhtälöitä, toisen asteen yhtälön juurten lukumäärän tutkiminen, toisen asteen polynomin jakaminen tekijöihin sekä polynomiepäyhtälön ratkaiseminen. [2, 119-120.] Opetussuunnitelman valossa näyttäisi siltä, että funktiota käsitellään MAA2 Polynomifunktiot -kurssilla tutummassa ympäristössä kuin MAA1-kurssilla. Lisäksi polynomifunktio erikseen mainittuna keskeisenä kurssin sisältönä voisi pitää sisällään toiveen funktion käsitteen kertaamisesta ennen kurssin vaikeampien polynomifunktioiden sovellusten osuutta.

Seuraavaksi esittelen lukion pitkän matematiikan oppikirjoja samoin, kuin olen edellä luvussa 3 tehnyt lyhyen matematiikan oppikirjojen kohdalla. Tarkoituksenani selvittää kuinka kolme eri kirjasarjaa käsittelevät funktion käsitteen. Käyn läpi kirjasarjoittain, mitä ja kuinka MAA1-kurssi opettaa funktioon liittyen. Lisäksi tutkin kuinka MAA2-kurssi Polynomifunktiot jatkavat MAA1-kurssin aloittamaa tietä funktioiden maailmaan. Kuten luvussa 3, nytkään en tule käymään erityisen tarkasti läpi kaikkia kurssien sisältöjä, mutta poimin oleellisimmat huomiot eri kirjasarjoista liittyen funktion käsitteeseen. Kirjasarjat ovat Pitkä SIGMA (Sanoma Pro), Pitkä matematiikka (Sanoma Pro) ja Laudatur (Otava) ja ne valikoituivat osaksi tutkimusta sen takia, että minulla oli lyhyen matematiikan osiossa tarkasteltavana kaksi vastaavaa kirjasarjaa. Kertoma!-kirjasarjaa ei ollut saatavana lukion pitkään matematiikkaan, joten valitsin Otavalta Laudatur-sarjan. Sanoma Pro toimitti tätä tutkimusta varten uusimmat painokset kirjasarjoistaan, kun taas Otava ilmoitti, että vuoden 2005 painos on edelleen ajantasainen.

Pitkä SIGMA (Sanoma Pro, 2014)

Pitkä SIGMA 1 Funktiot ja yhtälöt (2014)

Funktio mainitaan kirjassa ensimmäisen kerran viidennessä luvussa, joka on nimeltään Funktio [12, 98]. Sitä ennen kirjan ensimmäisessä luvussa Luvut ja niillä laskeminen [12, 5-22] käydään läpi lukujoukot, käsitteet vastaluku, käänteisluku ja itseisarvo [12, 9]. Lisäksi luvussa kerrataan lukujen peruslaskulaskutoimitukset ja keskitytään murtolukuihin [12, 16-18].

Seuraavan luvun [12, 23-45] otsikko on Yhtälöt. Luku aloittaa, että lausekkeella tarkoitetaan numeroiden ja kirjaimien avulla merkittyä laskutoimitusta. Kirja jatkaa, että lausekkeelle voidaan laskea arvo, kun siinä olevalle muuttujalle annetaan jokin lukuarvo. Edelleen kirja jatkaa kertomalla, että kun kaksi lauseketta merkitään yhtä suuriksi, saadaan yhtälö. [12, 25.] Seuraava asia luvussa on verrannollisuus, jonka yhteydessä puhutaan suureiden välisen riippuvuuden kuvaamisesta koordinaatistossa [12, 34]. Luvussa opetetaan sekä suoraan -, että kääntäen verrannollisuus.

Luvuissa 3 ja 4 otsikoina on Prosenttilaskenta sekä Potenssit ja juuret. Prosenttilaskenta-luku [12, 46-66] pitää sisällään suhteen käsitteen opetuksen, josta päästään käsiksi ajatukseen eri suhdelukujen vertailusta prosentin avulla [12, 47]. Perusharjoitusten jälkeen luvussa opiskellaan prosenttiyhtälöitä [12, 59-66]. Potenssit ja juuret -luku [12, 67-97] käsittelee potenssin käsitteen laskusääntöineen [12, 68-71]. Juurista käsitellään neliöjuuri [12, 79-86], kuutiojuuri [12, 88] ja yleinen juuri [12, 90]. Viimeinen asia luvussa on murtopotenssi [12, 92-97].

Kuten alussa jo mainitsin, kirjan viides luku on nimeltään Funktio [12, 98-128]. Funktion käsitettä lähestytään kahdella pohdintatehtävällä. Ensimmäisessä tehtävässä on nuolikuvioita, joissa on yhdistetty nuolella kahden eri soikion sisällä olevia asioita. Toisin sanottuna kahden eri joukon alkioita. Osa kohdista on jätetty tyhjiksi, jotka tulisi pystyä päättelemään muiden avulla. Toisessa tehtävässä tulisi päättelemällä yhdistää luonnollisen kielen tehtävänanto sekä symbolikielen lauseke. [12, 99.] Seuraavalla sivulla kirja kertoo, miten funktio on yksi matematiikan keskeisimpiä käsitteitä ja sitä tarvitaan, kun halutaan tutkia suureiden välisiä riippuvuuksia. Kirja jatkaa symbolikielen lausekkeen merkityksestä, että sellainen pyritään muodostamaan, jotta riippuvuuden täsmällinen tarkastelu olisi helpompaa. Edelleen funktioiden nimeämisestä kirja sanoo, että riippuvuutta kuvaavalle säännölle annetaan yleensä nimi helpottamaan riippuvuuksista puhumista ja nimen yhteydessä ilmoitetaan myös mikä lausekkeen kirjaimista on muuttuja. Lausekkeen muuttujan paikalle sijoittamalla erilaisia arvoja voidaan laskea funktiolle arvoja. Esimerkkifunktiona kirjassa on $f(x) = 0{,}80 + 0{,}07x$. [12, 100.] Sivulla 101 opetetaan määrittelyjoukko M_f ja arvojoukko A_f. Vielä teoriaosuuden lopussa [12, 101] kirja kiteyttää funktion säännöksi kahden joukon välillä. Lisäksi kirja kertoo, että funktion sanotaan kuvaavan määrittelyjoukon alkioita (usein lukuja) arvojoukon alkioiksi. Aivan teoriaosuuden lopuksi on tietolaatikko, jossa kerrotaan, että

> *”Funktio eli kuvaus f on sääntö, joka liittää jokaiseen määrittelyjoukon M_f alkioon täsmälleen yhden arvojoukon A_f alkion.” [12, 101.]*

Kirja jatkaa funktion kuvaajan opettamisella. Ensin oletetaan, että funktion määrittely- ja arvojoukon alkiot ovat lukuja. Samassa sovitaan, että jos määrittelyjoukon lukua merkitään kirjaimella x ja vastaavaa funktion arvoa $f(x)$ kirjaimella y, saadaan muodostettua lukupari (x, y). Nyt tätä lukuparia vastaava piste voidaan merkitä xy-koordinaatistoon. Kaikista funktioon kuuluvista lukupareista muodostuu funktion graafinen esitys eli funktion kuvaaja. [12, 103.]

Samassa, kun kirja opettaa funktion kuvaajan idean, esitellään ensimmäisen - ja toisen asteen polynomifunktiot kuvaajineen ja lausekkeineen [12, 103]. Kuitenkaan sitä ei erikseen kerrota, että polynomifunktioksi kutsutaan sellaista funktiota, jonka lauseke on polynomi. Kuvaajien tulkintaan ja lukemiseen paneudutaan [12, 105] nimettäessä x-akseli muuttuja-akseliksi ja y-akseli arvoakseliksi. Lisäksi opetetaan funktion nollakohta, $f(x) = 0$. Seuraavaksi kirjassa tulee tehtäviä liittyen funktioon [12, 106-110].

Kirjan seuraava alaluku keskittyy opetussuunnitelman tavoitteeseen, että opiskelija syventää funktiokäsitteen ymmärtämistään tutkimalla potenssi- ja eksponenttifunktioita. Nyt siirrytäänkin tutkimaan potenssifunktioita ja -yhtälöitä. Alaluvussa määritellään mitä tarkoitetaan potenssifunktiolla ja luetellaan sen ominaisuuksia [12, 112-113]. Samoin käsitellään potenssiyhtälö [12, 115]. Tämän jälkeen on aiheeseen liittyen harjoituksia. Eksponenttifunktioihin ja -yhtälöihin tutustutaan samoin, kuin potenssifunktioihin ja -yhtälöihinkin. Ensin kirjassa kerrotaan useiden kuvaajien kera, mitä eksponenttifunktiolla tarkoitetaan [12, 120-123]. Eksponenttiyhtälöön liittyen kerrotaan, että niiden tarkempaan ratkaisemiseen tutustutaan MAA8 Juuri- ja logaritmifunktiot -kurssilla, kun taas MAA1-kurssilla riittää graafinen ratkaisu tai niin sanottu haarukointi [12, 124]. Tämän jälkeen seuraa harjoitustehtävät. Seuraava luku kirjassa onkin Kertausosa [12, 129-135].

Pitkä SIGMA 2 Polynomifunktiot (2014)

Pitkä SIGMA -kirjasarjan MAA1-kurssikirja opetti jo täsmällisesti mitä funktiolla tarkoitetaan yleisesti. Lisäksi se esitteli ensimmäisen- ja toisen asteen polynomifunktiot kuvaajineen sekä syvensi funktion käsitteen ymmärtämistä vielä perustason teoriatiedolla ja harjoituksilla liittyen potenssi- ja eksponenttifunktioihin. Tämän tutkimuksen näkökulmasta Pitkä SIGMA -kirjasarja on siis jo täyttänyt kriteerin funktion käsitteen opettamisesta. Esittelen seuraavaksi lyhyesti, kuinka MAA2-kurssikirja Polynomifunktiot jatkaa funktion käsitteen käsittelyä.

MAA2-kurssikirja Polynomifunktiot syventää tietoa polynomeista. Se käy ensin läpi perusasiat polynomeista, kuten polynomien laskutoimitukset, termit ja termin osat ja tekijöihin jaon [13, 6-26]. Kirjan toinen luku on otsikoltaan Ensimmäisen asteen polynomifunktio, jossa pureudutaan tarkasti ensimmäisen asteen polynomifunktion ominaisuuksiin. Ensimmäisen asteen polynomifunktiolla on yleinen muoto $f(x) = kx + b$, jossa $k \neq 0$ ja b on reaaliluku ja funktion määrittelyjoukkona on koko reaaliakseli. Ensimmäisen asteen polynomifunktion kuvaaja xy-koordinaatistossa on suora $y = kx + b$, jossa b:tä sanotaan suoran vakiotermiksi ja k:ta suoran kulmakertoimeksi. Lisäksi opetetaan kulmakertoimen merkitys suoran kulkusuuntaan. [13, 29.] Funktion f nollakohta kerrataan tarkoittavan sitä muuttujan x arvoa, jolla $f(x) = 0$ eli kuvaajassa kohtaa, jossa suora leikkaa x-akselin. Samassa yhteydessä käydään läpi, mitä tarkoitetaan funktion merkillä, eli funktion negatiivisella tai positiivisella arvolla ja kuinka funktion nollakohta liittyy siihen. [13, 30.] Loogisesti seuraavana asiana opetetaan mitä tarkoitetaan ensimmäisen asteen epäyhtälöllä ja miksi sitä käytetään mm. silloin, kun halutaan saada selville ne muuttujan x arvot, joilla $f(x) > 0$ [13,31].

Seuraavina lukuina on toisen asteen polynomifunktio [13, 43-90], korkeamman asteen polynomifunktio [13, 91-109] ja Kertausosa. Toisen - ja korkeamman asteen polynomifunktioita käsittelevissä luvuissa paneudutaan lukujen aiheisiin samalla tapaa kuin edellä kuvasin ensimmäisen asteen polynomifunktioon paneutumista omassa luvussaan. Luvut syventävät ymmärrystä liittyen polynomifunktioihin, mutta varsinaiseen polynomifunktion käsitteeseen luvut eivät tuo mitään uutta.

Pitkä matematiikka (Sanoma Pro, 2015 ja 2014)

Pitkä matematiikka 1 Funktiot ja yhtälöt (2015)

Kirja ei opeta funktion käsitettä ollenkaan, mutta käyn tästä huolimatta läpi kirjan aiheet, koska kirja kuitenkin luo pohjaa lukion pitkän matematiikan myöhemmille kursseille ja mahdolliselle funktion käsitteelle. Kirja aloittaa lukujoukkojen kertaamisella ja peruslaskutoimitusten harjoittelulla [14, 9-21]. Seuraava aihe on ensimmäisen asteen yhtälö ja verrantomuotoinen yhtälö [14, 22-30]. Seuraavaksi kirja esittelee suoraan verrannollisuuden, jonka kerrotaan tarkoittavan sitä, että kaksi toisistaan riippuvaa suuretta muuttuvat samassa suhteessa [14, 31]. Kirja jatkaa verrannollisuuteen liittyen, että suoraan verrannollisuudesta voidaan myös muodostaa yhtälö $y = kx$, jossa k:ta kutsutaan verrannollisuuskertoimeksi [14, 34]. Kirja opettaa seuraavaksi kääntäen verrannollisuuden samaan tapaan kuin edellä suoraan verrannollisuuden [14, 38-45]. Seuraava aihe on prosenttilaskennan kertaus ja täydennys [14, 46-62]. Kirja käy läpi monipuolisesti erilaisia tilanteita liittyen prosenttilaskentaan. Prosenttiosuuden jälkeen kirjassa seuraa potenssi ja potenssilausekkeet [14, 63-82]. Potenssin määrittelyn ja harjoitusten jälkeen kirjassa esitellään negatiivinen eksponentti ja eksponentti nolla [14, 83-91]. Tämän jälkeen kirja nostaa tarkasteluun neliöjuuren, niillä laskemisen ja neliöyhtälön [14, 92-109].

Sivulla 107 mainitaan ensimmäisen kerran käsite funktio, kun esimerkissä tulee piirtää funktion x^2 kuvaaja ja päätellä siitä luvun $\sqrt{7}$ likiarvo. Ratkaisun yhteydessä kirja kertoo, että esimerkkifunktion kuvaaja muodostuu koordinaatiston pisteistä (x, y), missä y-koordinaatti on x-koordinaatin neliö. Lopuksi kirja kehottaa tarkastamaan kuvaajan graafisella laskimella. Seuraava aihe Potenssifunktiot ja korkeammat juuret kertoo, että potenssifunktioita ovat ne funktiot, joiden arvo on muuttujan x arvon potenssi, kuten x, x^2, x^3 jne. [14, 110]. Seuraavaksi kirjassa muodostetaan $n.$ juuri $\sqrt[n]{a}$ [14, 113] ja opetellaan ratkaisemaan potenssiyhtälö $x^n = a$ [14, 114]. Seuraava aihe kirjassa on eksponenttifunktio, joka tarkoittaa funktiota, jossa muuttuja on eksponenttina. Kirja jatkaa, että funktio on tällöin muotoa k^x, jossa $k > 0$. [14, 122.] Eksponenttifunktion kuvaajaa tutkitaan eri k:n arvoilla, kuten kun $0 < k < 1$ ja kun $k > 1$ [14, 124].

Seuraava luku käsittelee murtopotensseja ja kertookin heti sen tarkoittavan potenssia, jonka eksponenttina on murtoluku [14, 130]. Luvussa yhdistetään aikaisemmin opeteltu käsite n:nestä juuresta ja uusi aihe murtopotenssi siten, että $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ ja edelleen, määritellään että $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ [14, 132-133]. Viimeinen asia kirjassa on eksponentin ratkaiseminen, joita ratkaistaan siten, että pyritään yhtälön molemmat puolet ilmoittamaan saman kantaluvun potenssina, jolloin yhtälö toteutuu, kun eksponentit ovat yhtä suuret [14, 143].

Pitkä matematiikka 2 Polynomifunktiot (2014)

Kirja luo pohjaa ensimmäisen asteen epäyhtälölle reaalilukujen määrittelyllä, että rationaali- ja irrationaaliluvut muodostavat yhdessä reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ [15, 7-8]. Seuraavaksi opetetaan epäyhtälömerkit ja kerrotaan mitä tarkoitetaan lukusuoran väleillä [15, 10-11]. Kirja jatkaa itseisarvon määritelmällä ja kertoo, että niiden reaalilukujen joukkoa, jotka toteuttavat yhtälön tai epäyhtälön, kutsutaan yhtälön tai epäyhtälön ratkaisujoukoksi [15, 12-13]. Nyt kirja esittelee ensimmäisen asteen epäyhtälön [15, 16-21].

Seuraava luku kirjassa on Funktio [15, 22-31]. Kirja aloittaa funktion käsitteen käsittelyn muistuttamalla kurssia MAA1 ja kysyykin, että mitä funktioita siellä käsiteltiin. Lisäksi kirja kehottaa yrittämään määritellä funktion käsite. [15, 22.] Esimerkeissä on vain funktioita, joissa käsitellään lukuja. Funktio määritellään kertomalla, että funktio on sääntö, joka ilmaisee kuinka jokaisesta funktion määrittelyjoukon luvusta saadaan toinen luku, funktion arvo. Lisämääreenä säännölle sanotaan, että sen tulee olla sellainen, että se määrää funktion arvon yksikäsitteisesti. Kirja jatkaa funktion käsitteen määrittelyä:

> *”Jos f on funktio ja a jokin funktion f määrittelyjoukon luku, niin säännön mukaan laskettua funktion f arvoa merkitään $f(a)$. Luku $f(a)$ on funktion f arvo kohdassa (pisteessä) a.” [15, 25.]*

Funktion määritelmän jälkeen funktion lausekkeesta kerrotaan, että sen avulla voidaan usein kuvata kyseistä funktiota. Lausekkeessa on määrittelyjoukon lukuihin viittaava kirjain eli muuttuja ja se kertoo, kuinka funktion arvot lasketaan. Funktion arvot voidaan laskea sijoittamalla laskulausekkeen muuttujan paikalle arvoja. Kirja jatkaa toteamalla, ettei kaikilla funktioilla ole laskulauseketta, jollainen löytyy myöhemmin tehtävästä 56. Seuraavaksi kirja määrittelee mitä tarkoitetaan funktion määrittelyjoukolla. Jos funktio kuvataan suoraan laskusäännöllä, määrittelyjoukoksi kutsutaan suurinta mahdollista joukkoa, jossa funktion arvo voidaan laskea. [15, 25.] Kirja opettaa, että funktion kuvaaja on koordinaatiston käyrä, joka muodostuu niistä pisteistä, joiden koordinaatti vaaka-akselilla on muuttujan arvo ja pystyakselin koordinaatti funktion arvo. Ohessa on myös tilannetta havainnollistava kuva, jossa käyrältä on valittu piste $(a, f(a))$, josta on katkoviivalla osoitettu pisteen koordinaattien kohdat sekä x- että y-akselilta. Lisäksi kirja antaa esimerkin käyrästä, joka ei ole minkään funktion kuvaaja. [15, 26.] Funktion nollakohdista kirja kertoo, että niitä ovat ne muuttujan arvot, joilla funktio saa arvon nolla. Kirja sanoo, että koska funktion arvot ovat kuvaajan y-koordinaatteja, niin kuvaajaa tarkastellen funktion nollakohdat löytyvät kuvaajan ja x-akselin leikkauskohtien x-koordinaatista ja täsmällinen nollakohtien määrittäminen tapahtuu ratkaisemalla yhtälö $f(x) = 0$. [15, 27.]

Seuraava aihe kirjassa on polynomilaskennan kertaus ja täydennys, joka pitää sisällään monomin, binomin ja polynomin sekä polynomifunktion käsitteet. Polynomifunktiosta kerrotaan, että se on funktio, jonka lauseke on polynomi. [15, 32-33.] Kirja jatkaa polynomifunktioista, että jos polynomifunktion lausekkeessa on pelkästään vakiotermi, on kyseessä vakiofunktio, jonka kuvaaja on x-akselin suuntainen suora. Vakiofunktion on muotoa $f(x) = a$. Ensimmäisen asteen polynomifunktion $ax + b$, missä $a \neq 0$ ja jonka kuvaaja on joko nouseva suora (kun $a > 0$) tai laskeva suora (kun $a < 0$). [15, 32-36.] Tämän jälkeen kirja käsittelee polynomien laskutoimitukset ja binomien muistikaavat summan ja eron tulolle sekä summan ja erotuksen neliöille [15, 37-59].

Kirja jatkaa polynomifunktioista käsittelemällä seuraavaksi toisen asteen polynomifunktion käyden läpi sen tärkeimmät ominaisuudet. Toisen asteen polynomifunktiosta käydään läpi yleinen muoto $ax^2 + bx + c$, missä $a \neq 0$ sekä kerrotaan, että sen kuvaaja on paraabeli. Paraabeli aukeaa ylöspäin, kun $a > 0$ ja vastaavasti alaspäin, kun $a < 0$. [15, 60.] Toisen asteen yhtälöstä kerrotaan, että se on yhtälö, joka voidaan saattaa muotoon $ax^2 + bx + c = 0$, jota käytetään yhtälön juurien selvittämiseen. Juuria voi olla 0-2 kappaletta [15, 64]. Kirja jatkaa toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla [15, 69-70], minkä jälkeen seuraava funktioihin liittyvä asia on toisen asteen epäyhtälön opiskelu ja funktion merkin määrittäminen funktion nollakohtien avulla [15, 82-83]. Loppuosa kirjasta keskittyy mm. juurten lukumäärän tarkastelemiseen diskriminantin avulla [15, 93-94], sekä tarkastelee korkeamman asteen yhtälöitä ja epäyhtälöitä [15, 105-110]. Viimeinen kurssin asia on nollakohtien ja tekijöiden välinen yhteys, jossa opetellaan löytämään polynomin tekijät yhtälön nollakohtien avulla [15, 111-120].

Laudatur (Otava, 2005)

Laudatur 1 Funktiot ja yhtälöt (2005)

Kirja opettaa funktion käsitteen luvussa 8. Kirja aloittaa MAA1-kurssin opettamalla peruskäsitteitä, kuten lukujoukot luonnollisista luvuista aina kompleksilukuihin asti [16, 11-12], lukusuoran, vastaluvun ja itseisarvon [16, 14], lukuvälit vertailumerkkeineen [16, 15-18] sekä reaalilukujen laskulait ja laskujärjestyksen [16, 19-20]. Luvun lopuksi on harjoitustehtävät liittyen luvun teoriaan.

Toinen luku kirjassa keskittyy murtoluvuilla operointiin ja laskemiseen [16, 25-35]. Luvussa käsitellään myös jakoyhtälö [16, 26] sekä päättymättömän jaksollisen desimaaliluvun murtolukumuoto [16, 31]. Kolmas luku keskittyy potenssiin [16, 36-51]. Luvussa käydään läpi potenssin määritelmä ja laskusäännöt sekä erityisiä potensseja, kun eksponentti on 0 tai negatiivinen, tai kun kantalukuna on murtoluku. Viimeiset asiat luvussa on kymmenpotenssit, yksikkömuunnokset sekä luvun tarkkuus.

Neljäs luku kirjassa on Verrannollisuus [16, 52-67], joka pitää sisällään selityksen verrantomerkinnästä kahden suhteen muodostamana yhtälönä [16, 53], suoraan - [16, 54-55] ja kääntäen verrannollisuuden [16, 56-57] kuvaajineen symbolikielisine yleisine muotoineen sekä sovelluksia verrannollisuudesta [16, 58-61]. Viides luku kirjassa käsittelee prosenttilaskua [16, 68-82]. Kirja opettaa perusprosenttilaskut eli, prosenttiosuus lasketaan luvusta, kuinka lukujen suhteesta eli suhdeluvusta saadaan prosenttiluku ja mistä luvusta jokin tietty luku on ilmoitettu prosenttiosuus [16, 69-70]. Prosenttiin liittyvistä sovelluksista esitellään lukujen suuruuksien vertailu [16, 70-71], kasvaminen ja väheneminen prosenttiyksikön käsitteineen [16, 71-74], koronkorko [16, 75-76] ja liuoksen pitoisuus [16, 76-77].

Kuudes luku opettaa neliö- ja kuutiojuuren [16, 83-94]. Tärkeänä asiana luku nostaa juurrettavan ei-negatiivisuuden ja nimeää asian reaalisuusehdoksi [16, 83]. Luku käy läpi neliöjuuren määritelmän [16, 84] ja tulon ja osamäärän laskukaavat [16, 86]. Kuutiojuurelle tehdään samat tarkastelut [16, 89]. Kuudennen luvun jälkeen kirjassa on Testaa hyvät taitosi 1 -testi, jossa on tehtäviä tähän mennessä opittuihin asioihin liittyen.

Luku seitsemän, Yleinen juuri ja murtopotenssi aloittaa kertomalla, että juuret voidaan aina muuttaa potenssimuotoon, jolloin potenssien laskusääntöjen muistaminen riittää [16, 96]. Yleinen juuri määritellään sivulla 97. Kirja käy läpi murtopotenssin määritelmän [16, 98-99]. Kahdeksas luku on nimeltään Funktio [16, 105-118]. Luvun alussa kerrotaan, että funktio liittyy ilmiöihin, joissa suureen arvo riippuu toisesta suureesta. Kirja jatkaa, että funktiota voidaan myös verrata koneeseen, johon syötetään jotain ja tuloksena saadaan jotain uutta. [16, 106.] Esimerkkeinä on niin puhtaasti lukujen maailmassa tapahtuvia funktioita kuin myös sanan sisältämien kirjainten lukumäärää kuvaava funktio. Kirja jatkaa, että esimerkkien mukaista sääntöä kutsutaan funktioksi, mutta siitä ei ole aina mahdollista muodostaa matemaattista lauseketta. Kirjan mukaan ei ole merkitystä, kuinka sääntö on ilmaistu, jos sen avulla pystytään päättelemään funktion arvo. Jos sääntö voidaan kirjoittaa matemaattisilla laskutoimituksilla, laskusääntöä sanotaan funktion lausekkeeksi. Kirja jatkaa luonnollisen kielen avulla, että:

> *"Funktio on sääntö, joka ilmoittaa asioiden välisen riippuvuussuhteen. Muuttujaksi (variaabeli) sanotaan sitä arvoa, jota muutetaan. /.../ Säännön avulla saatua arvoa sanotaan funktion arvoksi. Muuttujaa merkitään yleensä kirjaimella x ja funktion arvoja kirjaimella y." [16, 107.]*

Määrittelyjoukoksi M_f kirja kutsuu sitä määrittelyaluetta, jolta valituilla muuttujilla funktion arvo on mielekäs laskea ja, jos määrittelyjoukkoa ei ole erikseen mainittu, se on laajin mahdollinen [16, 107]. Kirja kertoo, että funktiota on tapana merkitä kirjaimella, kuten $f, g, h, \ldots$ tai tilannetta kuvaavalla kirjaimella, kuten vaikka tilavuus V tai massa m. Riippuvuuden merkintätapa $y = f(x)$, missä x on muuttuja ja sen lausutapa "f arvolla x" kerrotaan. Seuraavaksi on isona kuviona funktio $h(x) = 2x + 1$, jonka ympärille on nimetty eri funktion osat: funktion nimi, muuttuja ja lauseke. Lisäksi seuraavaksi on tehty samaan funktioon sijoitus $x = 5$ ja sen yhteyteen on jälleen nimetty eri funktion osat: muuttujan arvo 5, sijoitus ja funktion arvo, kun muuttuja on 5. [16, 108.]

Seuraavaksi kirja määrittelee funktion täsmällisesti:

> *"Funktio eli kuvaus f joukosta A joukkoon B tarkoittaa sääntöä, joka liittää jokaiseen joukon A alkioon yksikäsitteisesti joukon B alkion. Merkitään $f: A \mapsto B$. Joukkoa A sanotaan määrittelyjoukoksi ja joukkoa B maalijoukoksi." [16, 109.]*

Määritelmän jälkeen on nuolikuvio, jossa on erittelemättömiä alkioita määrittelyjoukossa, joista jokaisesta lähtee yksi nuoli osaan maalijoukon alkioista. Tätä osajoukkoa kutsutaan arvojoukoksi. Kirja jatkaa, että yhteistä kaikille funktioilla on yksikäsitteisyys eli, että jokaiselle määrittelyjoukon jäsenelle saadaan säännön avulla täsmälleen yksi funktion arvo, maalijoukon jäsen. Funktion arvojen kerrotaan muodostavan arvojoukon A_f, jolloin arvojoukko koostuu niistä arvoista, joita funktio voi saada. Vielä kirja kertoo funktioiden samuudesta, että kaksi funktiota ovat samat, jos niillä on sama määrittelyjoukko, samat arvot jokaisessa pisteessä ja sama maalijoukko. [16, 109.]

Viimeinen Funktio-luvun asia, joka liittyen yleisesti funktion käsitteeseen, on funktion kuvaaja ja nollakohdat. Kirja kertoo, että kuvaajia käytetään havainnollistamaan funktion käyttäytymistä, eli suureiden välistä riippuvuutta. Kuvaaja voidaan muodostaa xy-koordinaatistoon, jolloin kuvaajan muodostavat ne pisteet, jotka toteuttavat funktion yhtälön. Ne muuttujan x arvot, joilla funktio $f(x)$ saa arvon 0 kutsutaan funktion nollakohdiksi ja kuvassa tämä tarkoittaa kuvaajan ja x-akselin leikkauspisteitä. Funktion yksikäsitteisyydestä kerrotaan, että mielivaltainen y-akselin suuntainen suora leikkaa funktion kuvaajan korkeintaan vain yhdessä pisteessä. [16, 110.]

Seuraava luku käsittelee potenssifunktiota [16, 119-129]. Kirja tutustuu potenssifunktioihin piirtämällä erilaisia potenssifunktiota, joissa toisaalta eksponenttina on positiivinen kokonaisluku: $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ ja $f(x) = x^3$ ja toisaalta negatiivinen kokonaisluku, jolloin kyseisestä funktiosta tuleekin murto-, eli rationaalifunktio. Molemmista tapauksista esitellään määrittelyjoukot ja ensimmäistä tapausta kutsutaan tutuksi polynomifunktioksi. [16, 120-122.] Tapaukset joissa eksponenttina on rationaali- tai irrationaaliluku käydään myös samoin läpi [16, 122-123]. Näistä esimerkinomaisista tapauksista päädytään potenssifunktion yleiseen muotoon $f(x) = x^n$, missä eksponentti $n \in \mathbb{R}$ ja kantaluku $x > 0$. Kirja myös mainitsee, että erikoistapauksissa potenssifunktion määrittelyjoukko voi olla laajempi kuin $\mathbb{R}_+$. [16, 125.]

Luku kymmenen tutustuu potenssiyhtälöihin [16, 130-145]. Kirja kertoo, että potenssiyhtälössä potenssin kantaluku on tuntematon, jonka likiarvo voidaan selvittää graafisesti kuvan avulla, tai jonka tarkka arvo saadaan algebrallisesti eli laskemalla [16, 130]. Kirja mainitsee, että potenssifunktioita käytetään matemaattisessa mallintamisessa, jolla tarkoitetaan käytännön riippuvuuden selvittämistä matematiikan keinoin [16, 137]. Kirjan viimeinen luku on Eksponenttifunktio [16, 146-159]. Eksponentiaalisesta muutoksesta kirja kertoo, että kun sama luku kerrotaan toistuvasti samalla vakiolla on kyse tällaisesta muutoksesta. Kirja antaa esimerkkejä eksponentiaalisesta kasvusta mm. koronkorko, populaatioiden kasvu sekä huhun eteneminen. Vastaavasti vähenemisestä esimerkkeinä mainitaan mm. lääkkeen määrä veressä, radioaktiivisen aineen määrä ja auton arvon aleneminen. [16, 146.] Kirja esittelee ensin kuvaajan avulla esimerkin kautta eksponenttifunktion, minkä jälkeen seuraa täsmällisempi määritelmä $f(x) = a^x$ muotoa olevalle eksponenttifunktiolle. Eksponenttifunktiosta mainitaan, että se lähestyy arvoa 0, mutta ei koskaan saavuta sitä, joten eksponenttifunktiolla ei ole nollakohtia. [16, 149-150.] Viimeinen asia eksponenttifunktiosta on sen sovellus matemaattisena mallina [16, 151]. Kirjan lopussa on toinen testaussivu [16, 160] ja kertausosa [16, 161-194].

Laudatur 2 Polynomifunktiot (2005)

Laudatur 2 Polynomifunktiot -kurssikirja aloittaa polynomien kertauksella. Kirja kertaa polynomien luonteen summalausekkeena sekä polynomin termien osat. Lisäksi kirja käy läpi kuinka polynomin asteluku määräytyy. Myös polynomien laskutoimitukset sekä binomien neliöiden sekä summan ja erotuksen tulon muistikaavat. [17, 6-17.] Seuraavaksi opetellaan polynomien tekijöihin jako [17, 18] ja polynomien jakolasku [17, 20]. Kirjan kolmas luku Ensimmäisen asteen yhtälö [17, 28-40] kertoo, että yhtälö eli (avoin) lause saadaan, kun kaksi lauseketta merkitään yhtä suuriksi [17, 28]. Kirja jatkaa, että yhtälön ratkaisua nimitetään juureksi [17, 29]. Kirja käy läpi identtiset yhtälöt [17, 32] sekä yhtälön, jossa on kirjainvakio eli parametri [17, 33]. Neljäs luku [17, 41-58] käsittelee toisen asteen yhtälöä esitellen sen yleisen muodon $ax^2 + bx + c = 0$, missä $a \neq 0$ [17, 41]. Lisäksi luvussa käydään yhtälön ratkaiseminen neliöjuuren avulla sekä tulon nollasäännön avulla [17, 42-43]. Neliöjuuren kohdalla muistellaan, kuinka edellisellä kurssilla potenssiyhtälöitä ratkaistiin juurten avulla. Myös toisen asteen yhtälön ratkaisukaava [17, 47-49] sekä diskriminantti ja sen merkitys juurten lukumäärään [17, 50-51] opetetaan. Viides luku Toisen asteen yhtälön sovelluksia [17, 58-65] pitää sisällään otsikon mukaisesti erilaisia soveltavia tehtäviä liittyen toisen asteen yhtälöön. Kuudes luku Toisen asteen polynomin tekijöihin jako opettaa miten toisen asteen yhtälön juurten summalla ja juurten tulolla on mielenkiintoinen yhteys yhtälön kertoimiin a, b ja c [17, 66-68]. Lisäksi luvussa opetellaan toisen asteen polynomin tekijöihin jako juurten avulla, jolloin toisen asteen polynomi saadaan muotoon $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, missä x_1 ja x_2 ovat yhtälön $x^2 + bx + c = 0$ juuret [17, 68-69]. Kuudennen luvun jälkeen kirjassa on ”Testaa hyvät taitosi 1” -osio, jonka avulla voi testata oman osaamisen suhteessa kurssilla aiemmin opetettuihin asioihin [17, 75]. Seitsemännessä luvussa Korkeamman asteen yhtälöt [17, 76-87] käydään läpi erityistapaukset korkeamman asteen yhtälöistä, kuten tulomuotoinen [17, 76-77], sijoituksella ratkeava [17, 78] sekä kokeilemalla ratkeava korkeamman asteen yhtälö [17, 79].

Kirjan kahdeksas luku Polynomifunktio [17, 88-104] kertoo, että polynomifunktio on funktio, jonka lauseke on polynomimuodossa. Polynomifunktion määrittelyjoukko on koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ ja polynomifunktion kuvaaja on katkeamaton, joten polynomifunktio on jatkuva. [17, 88.] Luku käy ensin läpi vakiofunktion, eli nollannen asteen polynomifunktion [17, 89], jonka jälkeen ensimmäisen asteen polynomifunktion [17, 90]. Ensimmäisen asteen polynomifunktion yleinen muoto on $f(x) = kx + b$, $k \neq 0$ ja sen kuvaaja on suora $y = kx + b$. Luku k on suoran kulmakerroin eli kaltevuus ja sen merkki kertoo on suora nouseva vai laskeva. [17, 90.] Luku kertoo vakion b kertovan kohdan, jossa suora leikkaa y-akselin ($x = 0$) lisäksi suoran yhtälölle esitetään kaksi muotoa, ratkaistu - ja normaalimuoto. Luku kertoo, että polynomifunktiota, jonka kuvaaja on suora, kutsutaan lineaariseksi funktioksi, jonka nollakohta saadaan selville joko likiarvona graafisesti piirtämällä funktion kuvaaja ja katsomalla kohta, jossa suora leikkaa x-akselin esim. pisteessä

$x = -2$ tai tarkkana arvona algebrallisesti eli laskemalla millä x:n arvolla funktio saa arvon 0. [17, 91.]

Seuraava aihe luvussa on toisen asteen polynomifunktio, jolle esitetään sen yleinen muoto $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ ja kerrotaan kuvaajan olevan paraabeli, jonka yhtälö on muotoa $y = ax^2 + bx + c$. Paraabelilla kerrotaan olevan huippu ja se on symmetrinen huipun kautta kulkevan pystysuoran suoran eli akselin suhteen. [17, 93.] Kuvaajia tarkastellen huomataan, että a:n merkki kertoo paraabelin aukeamissuunnan [17, 94]. Seuraava asia on funktion nollakohtien määrittäminen, jonka kerrotaan palautuvan toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaisemiseen. Tässä kohdassa myös esitetään aikaisemmin osoitetun diskriminantin merkin ja juurten lukumäärän välinen yhteys. [17, 97.] Vielä luvun lopuksi lyhyesti esitetään esimerkkien kautta korkeamman asteen polynomifunktiot $y = x^3$ ja $y = x^4$ [17, 99].

Yhdeksäs luku Funktion merkki [17, 105-112] aloittaa kertomalla, että funktion merkillä tarkoitetaan funktion saaman arvon merkkiä eli sitä onko arvo positiivinen vai negatiivinen. Funktion arvo on sama kuin y:n arvo, joten kuvaajan kulkiessa x-akselin alapuolella ($y < 0$) funktion arvot ovat negatiivisia, eli $f(x) < 0$. Vastaavasti kuvaajan kulkiessa x-akselin yläpuolella funktion arvot ovat positiivisia, eli $f(x) > 0$. [17, 105-106.] Seuraavaksi opetellaan tekemään funktion kulkua kuvaava merkkikaavio, josta näkyy kohdat, joissa funktion merkki vaihtuu sekä funktion merkki kulloisessakin välissä. Koska polynomifunktion kuvaaja on katkeamaton, niin kohdat, joissa merkki vaihtuu, ovat funktion nollakohtia, eli $f(x) = 0$. [17, 107.]

Kymmenes luku Ensimmäisen asteen epäyhtälö [17, 113-124] aloittaa kertomalla, että edellisen luvun merkkikaavion tekeminen oli periaatteessa epäyhtälön ratkaisua, kun haluttiin esim. tietää millä arvoilla funktio on positiivinen, eli $f(x) > 0$. Luku jatkaa kertomalla yhtälön ja epäyhtälön eron. [17, 113.] Ensimmäisen asteen epäyhtälön ratkaisemisesta kirjaa opettaa, että epäyhtälö tulee ensin saattaa sellaiseen muotoon, jossa epäyhtälön oikealle puolelle jää 0. Näin epäyhtälön ratkaiseminen palautuu funktion nollakohtien ratkaisemiseen ja funktion merkin selvittämiseen nollakohtien läheisyydessä. [17, 114.] Seuraavat asiat luvussa ovat ensimmäisen asteen epäyhtälön ratkaiseminen laskennallisesti [17, 116-119] ja ensimmäisen asteen epäyhtälön, jossa on parametri ratkaiseminen [17, 119-121]. Luvut yksitoista ja kaksitoista keskittyvät ensin toisen asteen epäyhtälön ja sitten korkeamman asteen epäyhtälön ratkaisemiseen, joista molemmista kirja sanoo niiden palautuvan funktion nollakohtien selvittämiseen ja merkin tarkasteluun. Kirja perustelee tämän sillä, koska funktio voi vaihtaa merkkiään vain sen nollakohdissa. [17, 125; 134.] Lopuksi kirjassa on vielä ”Testaa hyvät taitosi 2” -osio [17, 144] sekä kertausosio harjoituksineen [17, 145-169].

Yhteenveto funktion käsitteen opettamisesta eri kirjasarjoilla

Pitkä SIGMA -kirjasarjan MAA1-kurssikirja aloittaa kertaamalla luvut ja peruslaskutoimitukset, josta seuraava askel on lausekkeen muodostaminen, jolle voidaan laskea arvoja eri muuttujan arvoilla. Kun kaksi lauseketta merkitään yhtä suuriksi, syntyy yhtälö. Yhtälöstä edetään verrannollisuuteen ja suureiden välisen riippuvuuden kuvaaminen koordinaatistossa, minkä jälkeen kirja esittelee funktion käsitteen yleisesti nuolikuviona. Funktiosta kerrotaan, että se on keskeinen käsite, kun halutaan tutkia suureiden välisiä riippuvuuksia ja näin ollen se on sääntö kahden joukon välillä. Säännöstä pyritään muodostamaan symbolikielinen lauseke, jotta riippuvuuden täsmällinen tarkastelu olisi helpompaa ja funktioille annetaan nimi, jotta riippuvuuksista puhuminen on helpompaa. Nimen yhteydessä ilmoitetaan myös lausekkeen muuttuja, jonka paikalle sijoittamalla arvoja voidaan laskea funktion arvoja. Näin ollen funktio kuvaa määrittelyjoukon alkioita (usein lukuja) arvojoukon alkioiksi. Kirja opettaa funktiosta, että

> *”Funktio eli kuvaus f on sääntö, joka liittää jokaiseen määrittelyjoukon M_f alkioon täsmälleen yhden arvojoukon A_f alkion.” [12, 101.]*

Paneuduttaessa funktion kuvaajaan tehdään oletus, että määrittely- ja arvojoukon alkiot ovat lukuja ja samalla sovitaan, että määrittelyjoukon lukua merkitään kirjaimella x ja arvojoukon lukua kirjaimella y. Näin muodostuu lukupari (x, y), joka voidaan merkitä xy-koordinaatistoon, jonka akseleita kutsutaan muuttuja-akseliksi ja arvoakseliksi. Kuvaajien tarkastelun yhteydessä kirja esittelee ensimmäisen - ja toisen asteen polynomifunktion kuvaajat lausekkeineen, mutta nimeä, polynomifunktio ei selitetä. Viimeinen asia liittyen funktioon perusteisiin on funktion nollakohta. Kirjan lopuksi tutkitaan potenssi- ja eksponenttifunktioita, joiden ominaisuuksia luetellaan ja niihin liittyviä tehtäviä tehdään. Potenssi- ja eksponenttiyhtälöt kulkevat luonnollisesti mukana puhuttaessa vastaavista funktioista.

Pitkä SIGMA -kirjasarjan MAA2-kurssikirja syventää tietoa polynomeista. Polynomien perusteet kerrataan, jonka jälkeen tutustutaan tarkemmin ensimmäisen asteen polynomifunktioon. Siitä käydään läpi yleinen muoto, määrittelyjoukko, suora kuvaajana yhtälöineen ja kulmakertoimineen. Nollakohta kerrataan MAA1-kurssilta ja samassa ajatusta laajennetaan nollan molemmille puolille puhuttaessa funktion merkistä. Seuraavaksi opetellaan ensimmäisen asteen epäyhtälö ja sen merkitys funktion merkin tarkastelussa. Kirjan loppu käsittelee toisen - ja korkeamman asteen polynomifunktioita samalla tapaa, kuin ensimmäisen asteenkin käyden läpi niihin liittyviä ominaisuuksia. Kuitenkin funktion käsite on jo ennen näitä lukuja opetettu.

Pitkä matematiikka -kirjasarjan MAA1-kurssikirja ei opeta funktion käsitettä ollenkaan. Kirja kertaa lukujoukot ja peruslaskutoimitukset, josta se etenee ensimmäisen asteen yhtälöön ja edelleen verrantomuotoiseen yhtälöön. Seuraava asia on suoraan verrannollisuus, minkä kerrotaan tarkoittaa sitä, kun kaksi toisistaan riippuvaa suuretta muuttuvat samassa suhteessa ja tätä suhdetta voidaan kuvata yhtälöllä. Vastaavasti kääntäen verrannollisuus opetetaan. Verrannollisuuden jälkeen seuraa prosenttilaskennan kertaus ja täydennys monipuolisine harjoituksineen. Tämän jälkeen määritellään potenssi ja tehdään siihen liittyviä laskuja sekä tarkastellaan neliöjuurta. Tässä yhteydessä mainitaan ensimmäisen kerran funktio, kun määritetään luvun $\sqrt{7}$ likiarvo kuvaajalta. Kuvaajasta kerrotaan, että se muodostuu koordinaatiston pisteistä (x, y), joissa y-koordinaatti on x-koordinaatin neliö eli $y = x^2$. Eksponenttifunktio esitellään tarkoittavan sellaista funktiota, jossa muuttuja on eksponentissa.

Pitkä matematiikka -kirjasarjan MAA2-kurssikirja aloittaa reaalilukujen määrittelyllä, josta jatketaan väleihin lukusuoralla ja edelleen epäyhtälömerkkeihin. Tämän jälkeen kerrotaan ratkaisujoukon olevan se reaalilukujen joukko, joka toteuttaa annetun yhtälön tai epäyhtälön, jonka jälkeen opetellaan ensimmäisen asteen epäyhtälö. Seuraava asia kirjassa on funktio, jonka käsittelyn kirja aloittaa kysymällä mitä funktioita käsiteltiin MAA1-kurssilla. Funktion kerrotaan olevan sääntö, joka ilmaisee kuinka jokaisesta funktion määrittelyjoukon luvusta saadaan toinen luku, funktion arvo. Tämän säännön tulee olla yksikäsitteinen. Kirja jatkaa, että:

> *"Jos f on funktio ja a jokin funktion f määrittelyjoukon luku, niin säännön mukaan laskettua funktion f arvoa merkitään $f(a)$. Luku $f(a)$ on funktion f arvo kohdassa (pisteessä) a." [15, 25.]*

Funktion lausekkeella voidaan kuvata kyseistä funktiota ja siinä on määrittelyjoukon lukuihin viittaava kirjain eli muuttuja ja se kertoo, kuinka funktion arvot lasketaan. Kirja kertoo, ettei kaikille funktioille pystytä muodostamaan laskulauseketta. Seuraavaksi määritellään määrittelyjoukko, joka on suurin mahdollinen joukko, jossa funktion arvo voidaan laskea. Funktion kuvaaja muodostuu niistä koordinaatiston pisteistä, joiden koordinaatti vaaka-akselilla on muuttujan arvo ja pystyakselilla funktion arvo. Piste on siis muotoa $(a, f(a))$. Nollakohtia ovat ne muuttujan arvot, joilla funktio saa arvon nolla ja kuvaajalta ne löytyvät kuvaajan ja x-akselin leikkauskohtien x-koordinaatista. Täsmällisesti nollakohtien määrittäminen tapahtuu ratkaisemalla yhtälö $f(x) = 0$.

Seuraava aihe kirjassa on polynomilaskennan kertaus ja täydennys, jonka yhteydessä opetetaan polynomifunktion käsite funktiona, jonka lauseke on polynomi. Kirja jatkaa käymällä läpi ensimmäisen -, toisen - ja korkeamman asteen polynomifunktioita. Erilaisten polynomifunktioiden kuvaajia tarkastellaan, yleiset muodot opetellaan ja mm. nollakohtia ratkotaan epäyhtälöin. Viimeinen kurssin asia on nollakohtien ja tekijöiden välinen yhteys, jossa opetellaan löytämään polynomin tekijät yhtälön nollakohtein avulla.

Laudatur-kirjasarjan MAA1-kurssikirja aloittaa kertaamalla peruskäsitteitä, kuten mm. lukujoukot, lukusuoran sekä reaalilukujen laskulait ja -järjestyksen. Toinen luku keskittyy murtoluvuilla operointiin sekä siinä käsitellään jakoyhtälö. Kolmannessa luvussa käsitellään potenssi määritelmineen ja erilaisine eksponenttivaihtoehtoineen. Neljännessä luvussa opetellaan verrannollisuus, jossa itsessään merkinnässä on kyse kahden suhteen muodostamasta yhtälöstä. Luvussa käydään läpi suoraan - ja kääntäen verrannollisuus. Viides luku käsittelee prosenttilaskua, jonka yhteydessä opetetaan mm. kuinka lukujen suhteesta eli suhdeluvusta saadaan prosenttiluku. Kuudes luku opettaa neliö- ja kuutiojuuren määritelmineen ja nostaa tarkasteluun juuriin liittyvän reaalisuusehdon. Seitsemäs luku kirjassa on ”Yleinen juuri ja murtopotenssi”, jonka tärkein sisältö on, että kaikki juuret voidaan aina palauttaa potenssimuotoon, jolloin juurien kanssa pärjää potenssien laskusääntöjen hallinnalla.

Kirjan kahdeksannessa luvussa määritellään funktio. Funktion kerrotaan liittyvän ilmiöihin, joissa suureen arvo riippuu toisesta suureesta. Toisaalta funktiota voidaan verrata koneeseen, johon syötetään jotain ja tuloksena saadaan jotain uutta. Esimerkkejä ei rajata koskemaan vain lukuja ja näiden esimerkkien sääntöjä kutsutaan funktioiksi. Jos funktion sääntö pystytään muotoilemaan matemaattisilla laskutoimituksilla, kutsutaan sitä funktion lausekkeeksi, mutta aina näin ei kuitenkaan ole. Kirja jatkaa vielä, että sillä ei merkitystä kuinka sääntö on ilmaistu, kunhan sen avulla pystytään päättelemään funktion arvo. Kirja kertoo funktiosta, että

> *”Funktio on sääntö, joka ilmoittaa asioiden välisen riippuvuussuhteen. Muuttujaksi (variaabeli) sanotaan sitä arvoa, jota muutetaan. /…/ Säännön avulla saatua arvoa sanotaan funktion arvoksi. Muuttujaa merkitään yleensä kirjaimella x ja funktion arvoja kirjaimella y.” [16, 107.]*

Määrittelyjoukoksi kutsutaan sitä määrittelyaluetta, jolta valituilla muuttujilla funktion arvo on mielekäs laskea. Funktion nimeämisestä mainitaan, että funktiota on tapana merkitä jollain kirjaimella. Riippuvuus merkitään $y = f(x)$, missä x on muuttuja ja se lausutaan ”f arvolla x”. Kirja esittelee symbolikielisen funktion nimineen isona omana kuvionaan, jonka jälkeen funktioon tehdään sijoitus $x = 5$, joka myös esitetään isona kuviona, jossa jokainen symbolikielen funktion osalle annetaan nimi ja rooli funktiossa. Nyt kirja määrittelee funktion täsmällisesti:

> *”Funktio eli kuvaus f joukosta A joukkoon B tarkoittaa sääntöä, joka liittää jokaiseen joukon A alkioon yksikäsitteisesti joukon B alkion. Merkitään $f: A \mapsto B$. Joukkoa A sanotaan määrittelyjoukoksi ja joukkoa B maalijoukoksi.” [16, 109.]*

Tämän jälkeen funktio esitetään yleisenä nuolikuviona, jossa määrittelyjoukon nimeämättömiä pisteitä eli alkioita yhdistyy osaan maalijoukon alkioihin. Tätä osaa maalijoukosta kutsutaan arvojoukoksi. Yhteistä kaikille funktioille on yksikäsitteisyys eli, että jokaiseen määrittelyjoukon jäseneen liitetään täsmälleen yksi arvojoukon jäsen. Arvojoukko koostuu niistä arvoista, joita funktio voi saada. Kirja kertoo, että kaksi funktiota ovat samat, vain jos kolme ehtoa toteutuvat. Seuraavaksi käsitellään funktion kuvaaja ja nollakohdat. Kuvaajan merkitys funktiolle on havainnollistaa sen käyttäytymistä, eli suureiden välistä riippuvuutta xy-koordinaatistossa. Kuvaajan pisteinä ovat ne pisteet, jotka toteuttavat funktion yhtälön. Ne muuttujan arvot, joilla funktio $f(x)$ saa arvon nolla, kutsutaan nollakohdiksi, mikä näkyy kuvaajassa kuvaajan ja x-akselin leikkauspisteessä. Funktion yksikäsitteisyyttä havainnollistetaan kertomalla kuvaajan yhteydessä, että mielivaltainen y-akselin suuntainen suora leikkaa funktion korkeintaan vain yhdessä pisteessä.

Seuraava asia on potenssifunktio. Potenssifunktiosta esitellään positiiviset ja negatiiviset eksponentit, jolloin itse asiassa puhutaan polynomifunktioista tai rationaalifunktioista. Potenssifunktion yleinen muoto esitellään. Kymmenes luku kirjassa tutustuttaa potenssiyhtälöihin ja viimeinen luku eksponenttifunktioihin. Kirja luettelee erilaisia eksponentiaalisen kasvun esimerkkeinä mm. koronkoron, populaatioiden kasvun sekä huhun etenemisen. Vähenemisen esimerkkeinä annetaan mm. lääkkeen määrä veressä, radioaktiivisen aineen määrä ja auton arvon aleneminen. Eksponenttifunktion yleinen muoto opetetaan ja siitä kerrotaan, että se lähenee, mutta ei koskaan saavuta nollaa, joten sillä ei ole nollakohtaa.

Funktio opetettiin yleisellä tasolla jo MAA1-kurssilla ja potenssifunktion yhteydessä mainittiin ”tuttu” polynomifunktio. Nyt MAA2-kurssikirja aloittaa polynomien kertauksella. Seuraava asia on polynomin tekijöihin jako ja polynomien jakolasku. Tämän jälkeen seuraa ensimmäisen asteen yhtälö ja kirja kertoo yhtälöstä sen olevan (avoin) lause, joka saadaan, kun kaksi lauseketta merkitään yhtä suuriksi. Yhtälön ratkaisua sanotaan juureksi. Seuraavaksi edetään toisen asteen yhtälöön, sen sovelluksiin, sen tekijöihin jakoon ja lopuksi korkeamman asteen yhtälöt.

Tämän jälkeen kirjassa esitellään tarkemmin polynomifunktion käsite. Nyt kerrotaan, että polynomifunktion lauseke on polynomi. Polynomifunktion määrittelyjoukko on koko reaalilukujen joukko ja sen kuvaaja on katkeamaton, joten se on jatkuva funktio. Vakiofunktion sekä ensimmäisen asteen polynomifunktion yleinen muoto esitellään ja lineaarisen funktion kulmakertoimen rooli opetetaan. Nollakohta määritetään joko likiarvona kuvaajalta tai tarkkana arvona laskemalla muuttujan arvo, kun funktion arvo on nolla. Tämän jälkeen toisen asteen polynomifunktio käydään tarkasti läpi, minkä jälkeen kirjan yhdeksäs luku opettaa funktion merkin tarkastelun merkkikaaviota hyväksi käyttäen. Koska polynomifunktio on katkeamaton, funktio voi vaihtaa merkkiä vain sen nollakohdissa. Seuraava aihe kirjassa on ensimmäisen asteen epäyhtälö, jonka yhteydessä mainitaan, että edellisen luvun merkkikaavioiden teko oli oikeastaan jo epäyhtälön ratkaisua. Loput kirjan aiheista ovat toisen - ja korkeamman asteen epäyhtälöt, jotka kaikki palautuvat kirjan mukaan funktion nollakohtien ratkaisemiseen, koska vain nollakohdassa polynomifunktio voi vaihtaa merkkiään.

5 JOHTOPÄÄTÖKSET FUNKTION OPETTAMISESTA

Tämän tutkimuksen tavoitteena on ollut selvittää kuinka funktion käsite opetetaan lukion lyhyessä - ja pitkässä matematiikassa. Edellä kuvaamani oppikirja-analyysin avulla on helppo havaita, että sekä lyhyessä - että pitkässä matematiikassa funktion käsitteen osalta oli selkeitä eroja kirjasarjojen välillä. Tästä kertoo jo se, että vaikka kaikki kirjasarjat noudattivat samaa opetussuunnitelmaa, funktion käsite opetettiin kirjasarjasta riippuen jopa eri kurssilla. Lyhyestä matematiikasta funktion käsitteen opetti MAB1-kurssilla vain Lyhyt Matikka -kirjasarja, kun taas SIGMA ja Kertoma! opettivat sen MAB3-kurssilla. Pitkässä matematiikassa havainto oli päinvastainen, että Pitkä Matematiikka -kirjasarja opetti funktion käsitteen vasta MAA2-kurssilla, kun Pitkä SIGMA ja Laudatur -kirjasarjat opettivat sen jo kurssilla MAA1.

Funktion opettaminen lyhyessä matematiikassa

Lyhyessä matematiikassa kirjasarjojen välillä oli suuria eroja, kuinka ja missä järjestyksessä asiat esitettiin suhteessa funktion käsitteeseen. Funktio asetettiin eri sarjoilla erilaiseen asemaan suhteessa muihin matematiikan osa-alueisiin. Yhteistä kaikille kirjasarjoille on, että ne opettavat funktiolla kuvattavan suureiden välistä riippuvuutta. Kaikissa kirjasarjoissa myös sanotaan, että funktion sääntö pyritään ilmoittamaan matemaattisella lausekkeella. Kolmea kirjasarjaa vertailemalla ei voida rajata yhtä tapaa, jolla funktio lukion lyhyessä matematiikassa opetetaan, vaan kirjasarjan valinta vaikuttaa oleellisesti tapaan. Lyhyt Matikka -kirjasarja suhteutui funktioon välineenä, jolla ensisijaisesti toimittiin, kun taas SIGMA ja Kertoma! -kirjasarjoissa se oli enemmänkin päämäärä, jota kohti oltiin matkalla. Tästä funktion käsitteen asemoinnista suhteessa muuhun sisältöön kertoo suoraan se, millä kurssilla funktio kirjasarjassa opetettiin.

Lyhyt Matikka -kirjasarjalla on hyvin suoraviivainen tapa lähestyä funktion käsitettä. Se ei esittele ollenkaan yleistä funktion käsitettä, vaan sitoo sen kiinteäksi osaksi lukuja ja mitattavia suureita. Kirja (MAB1) aloittaa heti puhumaan lineaarisesta funktiosta, joka on kuin kone, joka tuottaa koneeseen syötetystä luvusta uuden luvun sääntönsä mukaan. Funktion kerrotaan olevan sääntö, joka ilmaisee kuinka luvusta saadaan toinen luku.

SIGMA-kirjasarja luo pohjaa funktion käsitteen ymmärtämiselle koko MAB1-kurssin ajan. SIGMA:n tapa esittää asiat on hyvin looginen ja johdonmukainen. MAB1-kurssilla opiskellaan perusasiat aina luvuilla laskemisesta polynomin käsitteeseen ja edelleen kahden lausekkeen muodostamaan yhtälöön. MAB3-kirja jatkaa suoraviivaisesti siitä mihin MAB1-kurssi jäi. Kaikki pohjatiedot on opetettu, jotta funktion käsite voidaan opettaa. Funktion yleistä muotoa ei opeteta, mutta kirja kertoo funktion liittävän jokaiseen muuttujaan x täsmälleen yhden arvon y.

Kertoma!-kirjasarja aloittaa perusasioilla peruslaskutoimituksista, lausekkeeseen ja edelleen polynomiin ja siitä saatavaan lukupariin (x, y). MAB1-kurssikirja esittelee polynomifunktion funktiona, jonka lauseke on polynomi, mutta ei määrittele funktion käsitettä. Polynomifunktion kuvaajan piirtäminen xy-koordinaatistoon opetetaan ja nollakohtien ratkaiseminen niin graafisesti, kuin myös algebrallisesti esitellään. MAB3-kirja muistuttaa mieleen kertaamalla edellisen kurssin asiat funktioon liittyen. Tämän jälkeen funktion kerrotaan yleisesti kuvaavan tietylle muuttujan arvolle yksikäsitteisen arvon. Esimerkkinä tällaisesta yleisestä funktiosta kirja esittelee jokaisen suomalaisen (muuttuja), jolla on oma henkilötunnuksensa (arvo). Näin ollen jokainen suomalainen muodostaa funktion oman henkilötunnuksensa kanssa. Yleisen funktion käsitteen määrittelyn jälkeen kirja jatkaa lineaarisiin polynomifunktioihin, mikä syventää ymmärrystä MAB1-kurssilla esitettyyn polynomifunktion käsitteeseen.

Mikään tutkimuksessa olleista lyhyen matematiikan oppikirjoista ei esitellyt funktiota abstraktina, kahden joukon välisenä nuolikuviona, vaan ne pitäytyivät konkreettisissa esimerkeissä. Lähimmäs abstraktia funktion määritelmää pääsi Kertoma!-kirjasarja, joka esitteli funktiosta yleisen muodon ilman rajoittumista lukuihin antaen funktiosta monipuolisesti esimerkkejä eri elämänaloilta, kuten suomalaiset henkilöturvatunnuksineen.

Funktion opettaminen pitkässä matematiikassa

Yhtälailla myös lukion pitkän matematiikan oppikirjoissa löytyi eroja, kuinka funktion käsite opetetaan ja mikä on sen sijainti suhteessa muihin opiskeltaviin asioihin. Konkreettisin ero näkyy siinä, että Pitkä Matematiikka -kirjasarja ei opettanut funktion käsitettä lainkaan MAA1-kurssilla, toisin kuin kaksi muuta kirjasarjaa. Jokainen kirjasarja opetti funktion olevan yksikäsitteinen sääntö. Kuitenkin asian esittämisen matemaattisessa täsmällisyydessä on eroja. Kaikki kirjasarjat opettivat perusproseduurit liittyen funktioihin, kuten symbolikielisen merkintätavan funktion lausekkeena funktion nimineen ja muuttujineen, arvon laskemisen, kuvaajan ja nollakohdan määrittämisen sekä kuvaajalta että laskemalla.

Pitkä Matematiikka -kirjasarja ei opeta funktion käsitettä yleisesti, vaan rajaa funktion koskemaan vain lukuja. Kirjasarja ei myöskään esittele maali- tai arvojoukkoa ollenkaan. Kirja (MAA2) kertoo funktion olevan sääntö, joka ilmaisee, kuinka jokaisesta määrittelyjoukon luvusta saadaan toinen luku. Tästä voi tulla ajatus, että funktio tekee määrittelyjoukon luvulle jotain. Muita erityisiä huomioita kirjasarjan tapaan opettaa funktion käsite on, että kurssilla MAA1 puhutaan eksponenttifunktiosta ennen kuin on määritelty funktion käsitettä ja toisaalta, että MAA2-kurssilla epäyhtälö opetetaan ennen funktion käsitteen opettamista. Kirjasarjan esittelemä funktio on väline, jolla saadaan selville yhdestä luvusta toinen.

Pitkä SIGMA MAA1-kurssikirja muodostaa loogisen ajatuspolun peruslaskutoimituksista yhtälöön ja aina suureiden väliseen riippuvuuden esittämiseen koordinaatistossa. Funktiosta kerrotaan, että sitä käytetään, kun tutkitaan suureiden välisiä riippuvuuksia ja sille pyritään muodostamaan symbolikielinen lauseke helpottamaan em. riippuvuustarkasteluja. Funktio esitetään yleisesti nuolikuviona ja samalla kerrotaan, että funktio on sääntö kahden joukon välillä, jolloin funktio kuvaa määrittelyjoukon alkioita arvojoukon alkioiksi. Samassa yhteydessä kerrotaan, että määrittelyjoukon alkiot ovat usein lukuja. Kirja (MAA1) kiteyttää, että funktio eli kuvaus on sääntö, joka liittää jokaiseen määrittelyjoukon alkioon täsmälleen yhden arvojoukon alkion. Epäyhtälö opetetaan vasta, kun tutkitaan funktion merkkiä, joten funktiota käytetään uuden asian oppimisen pohjana, jolloin epäyhtälöharjoitukset saavat heti merkityksen.

Laudatur-kirjasarjan looginen polku perusasioista kohti funktiota ei ole niin selkeä, kuin SIGMA-sarjassa. Kuitenkin tapa esittää funktio on monipuolinen ja lopulta täsmällisin. Funktio liittyy ilmiöihin, joissa suureen arvo riippuu toisesta suureesta, mikä tekee funktiosta konemaisen, jolloin syötetystä asiasta saadaan koneen avulla tulokseksi jotain aivan uutta. Funktioesimerkkejä ei rajata koskemaan vain lukuja ja esimerkkien sääntöjä kutsutaan funktioiksi. Säännön esittämistavalla ei ole merkitystä, kunhan sen avulla pystytään päättelemään funktion arvo. Funktio onkin siis sääntö, joka ilmoittaa asioiden välisen riippuvuussuhteen. Kirja määrittelee funktion täsmällisesti, että funktio eli kuvaus f joukosta A joukkoon B tarkoittaa sääntöä, joka liittää jokaiseen joukon A alkioon yksikäsitteisesti joukon B alkion. Lisäksi joukoille A ja B annetaan nimet määrittely- ja maalijoukko. Nyt määritelmä havainnollistetaan yleisenä nuolikuviona ilman nimettyjä joukkojen alkioita. Pisteet, joille määrittelyjoukon alkiot kuvautuvat muodostavat arvojoukon, joka on osa maalijoukkoa. Laudatur oli ainoa kirjasarja, joka nosti esiin, että polynomifunktion kuvaaja on katkeamaton, jolloin se on jatkuva. Tätä tietoa hyödynnettiin funktion merkin tarkastelussa, kun kirja totesi, ettei merkki voinut vaihtua kuin funktion nollakohdissa.

Pitkässä matematiikassa täsmällisin, ja samalla runsain kirjasarja funktion käsitteen osalta oli Laudatur. Pitkä SIGMA oli loogisin ja rakenteeltaan selkein kokonaisuus koko MAA1-kurssia ja funktion käsitteen muodostamista ajatellen. Se opetti funktion käsitteestä kaiken tarpeellisen, jotta sen voi omaksua ja ymmärtää yleisellä tasolla, mutta ei enempää. Pitkä Matematiikka oli esitykseltään niukin ja rajasi funktion koskemaan vain lukuja ja esitteli funktion enemmänkin toiminnallisena välineenä, kuin kuvauksena kahden joukon välillä.

6 POHDINTAA ERI KIRJASARJOISTA

Tutkimus toi esiin sen, että kirjasarjalla on todellista merkitystä, kuinka funktion käsite ja siihen liittyvät asiat esitetään. Kuitenkaan tutkimus ei ota kantaa, mikä tavoista on ”paras” funktion käsitteen oppimisen kannalta. Tutkimus ei myöskään vastaa kysymykseen, minkä tasoinen funktion käsitteen ymmärtäminen on tarpeen vai riittääkö, että osaa tehdä funktioihin liittyviä proseduureja, ratkaista tehtäviä ja kenties pärjätä hyvinkin ylioppilaskokeissa. Kunkin opettajan tulisi pohtia tietoisesti ja tehdä lopulliset valintansa, kuinka funktion käsitteen opettaa ja mitä pitää siinä opettelemisen ja toisaalta ymmärtämisen arvoisena. Tutkimuksen tärkein johtopäätelmä on se, että vaikka kaikki kirjasarjat noudattivat samaa opetussuunnitelmaa, olivat tavat opettaa funktio jokaisessa kirjasarjassa erilainen. Näin ollen opettajien tulee olla tietoisia niistä syistä, joiden takia valitsevat käyttämänsä kurssikirjat ja toisaalta niistä seurauksista, joita nämä valinnat mahdollisesti aiheuttavat oppilaiden matemaattisessa osaamisessa. Opettajan tulee olla tietoinen siitä, mitä pitää matematiikan osaamisessa tärkeänä ja millä keinoilla tai minkä kirjan painotuksilla hän haluaa päästä päämääräänsä oppilaidensa osaamisessa. Seuraavaksi avaan omaa pohdintaani liittyen eri kirjasarjoihin ja niiden ominaisuuksiin.

Lyhyt matematiikka

SIGMA

SIGMA-kirjasarja esittää asiat todella loogisesti ja ehjästi. Uskon, että kirjan avulla opiskeltaessa on helppo ymmärtää, miten eri käsitteet liittyvät toisiinsa. Lisäksi lukujen lopussa olevat hierarkkiset käsitekaaviot lisäävät luottamusta kirjan valitsemaan polkuun. Kaaviosta voi, vaikka kesken kurssinkin, katsoa ja tarkistaa missä kohtaa nyt liikutaan ja miten opeteltava käsite liittyy aiemmin opittuihin käsitteisiin. Matemaattisuus tekee kirjan ulkoasusta hieman kömpelön, mutta toisaalta asioiden esittämisestä erittäin selkeän.

SIGMA 1 ei nosta funktion käsitettä tarpeettomasti esiin, vaan tutustuu tarkemmin siihen asiaan, mitä itse asiassa ollaan tekemässä, kuten laskutoimituksiin lausekkeilla [8, 35-43]. Kirja opettaa kaikki oleelliset asiat ennen funktion käsitteen esittämistä, kuten lauseke, polynomi, yhtälö sekä suhde ja verranto (riippuvuus). Koko kirja luo johdonmukaisesti pohjaa funktion ymmärtämiselle. Polynomifunktion käsite esitellään vasta kurssikirjan Extra-osiossa, mutta ei ollenkaan varsinaisessa kurssiosuudessa. Tämä on minusta hyvä valinta, koska kirjan asioissa ei yksinkertaisesti tarvita funktion käsitettä.

SIGMA 3 aloittaa sanomalla, että funktion käsite on yksi matematiikan keskeisimmistä käsitteistä. Kuitenkin kirja esittelee funktion käsitteen vain lukujen avulla, jolloin funktion yleinen merkitys kuvauksena kahden joukon välillä jää tuntemattomaksi. Myöskään polynomifunktion käsitettä ei opeteta, vaikka esimerkeistä suurin osa on juuri niitä. Lineaarista mallia ja funktiota ei nivota mitenkään yhteen, joten tuntuu, että funktion merkitys yhtenä matematiikan keskeisimmistä käsitteistä jäi nyt valitettavasti vain sen uskon varaan, että kirjan tekijät puhuivat totta.

Mielestäni SIGMA 1:een verrattuna SIGMA 3 ”juoksee” funktion käsitteen kohdalla hämmentävän suoraviivaisesti. Funktiossa mennään heti kahden suureen väliseen riippuvuuteen ilman ei-lukujen maailmasta otettuja esimerkkejä. Lisäksi, kun funktiota käsittelevä luku on käyty, ei funktion käsitettä käytetä enää lineaarisen mallin yhteydessä, vaikka usein ne on totuttu rinnastamaan hyvinkin voimakkaasti toisiinsa ensimmäisen asteen polynomifunktion käsitteen avulla.

Kirjasarja lupasi enemmän funktion käsitteen opettamisesta, kuin pystyi lopulta lunastamaan. Tätä tutkimusta tehdessäni luin myös SIGMA:n vanhempia painoksia ja harmikseni jouduin huomaamaan, että aikaisempi, vuoden 2004 painos opetti funktion käsitteen paljon täsmällisemmin kuin tähän tutkimukseen valikoitunut 2011 vuoden versio. Edellinen painos opetti mm. funktion yleisen muodon nuolikuvioiden kera kahden joukon välisenä suhteena määrittely- ja arvojoukkoja unohtamatta. Vanha painos muistutti sisällöltään paljon Pitkä SIGMA -kirjasarjan tapaa esittää funktio. Kustantajan internetsivuilla sanotaan, että SIGMA 3 -kirja uudistui käyttäjiltä saadun palautteen mukaisesti [4]. Liekö kurssi koettu aikaisemmin liian matemaattiseksi ja haluttu enemmän proseduraalista harjoittelua. Oli niin tai näin, niin funktion käsitteen opettamisen näkökulmasta askel on ollut ymmärryksen kannalta rajoittavampaan suuntaan.

Lyhyt Matikka

Päällimmäisin ajatus kirjasarjaan tutustumisen jälkeen on, että se pyrkii olemaan matemaattisesti ehjä ja looginen, mutta ei halua nostaa rimaa liian korkealle, vaan yrittää pitää sen ”lyhyelle matematiikalle sopivalla korkeudella”. Minusta lopputulos on se, että asioita ei ole esitetty matemaattisesti kovinkaan täsmällisesti, eikä toisaalta erityisen kiinnostavasti tai motivoivasti arkielämän kannalta. Toisin sanottuna funktiota ei ole esitetty matemaattisesti niin loogisesti kuin se olisi voitu esittää, mutta riittävän matemaattisesti ollakseen tylsä ja vaikeaselkoinen. Myös kirjan tapa ajatella funktiosta on mielestäni välineellinen, mikä näkyy siinä, että idea funktiosta otetaan annettuna ja sille käytetään konemetaforaa. Tätä konetta käyttämällä ratkaistaan tehtäviä liittyen funktioon. Haluan huomauttaa, että nämä ajatukseni koskevat vain funktion käsitteen opettamista.

Kirjasarjan tapa lähestyä funktion käsitettä on hyvin suoraviivainen ja keskittyy laskuproseduureihin, jotka liittyvät funktioon. Ensinnäkin kirjasarjassa funktio esitellään lukujen kautta ja ilman että pysähdyttäisiin pohtimaan sitä syvällisemmin tai laajemmin. Kirjasarjassa ei mainita, että se olisi eri joukkojen välinen asia, relaatio. Tapa, jolla kirja funktion esittelee, on minusta helppo uskoa ja tämän uskon varassa opiskelijat osaavat varmasti ratkaista funktioon liittyviä tehtäviä. Kirja sanoo, että funktio on sääntö ja tälle säännölle kirja käyttää konemetaforaa. Kirjasarja herättää funktiosta ajatuksen varsin dynaamisesta, toimintaan liittyvästä asiasta, vaikka esimerkiksi lukupari $(0, -6)$ ”vain” kuuluu funktioon tai ”ovat” funktiossa. Toisaalta lukupari siis noudattaa funktion sääntöä, mutta jälleen ajatus ajautuu johonkin toimintaan. Asiasta ei ehkä kannata tehdä ongelmaa ja eri joukkojen välillä tapahtuvana kuvauksena funktion esittely vaatisi tietysti ymmärrystä eri joukkoja kohtaan. Lisäksi kun muistetaan, että kyseessä on lyhyt matematiikka, jossa pääpaino on, että oppilas näkee reaalimaailman ilmiöissä säännönmukaisuuksia ja riippuvuuksia ja kuvaa niitä matemaattisilla malleilla ja edelleen tottuu arvioimaan mallien hyvyyttä ja käyttökelpoisuutta [2, 126], niin lienee selvää, ettei joukkojen välisestä funktiosta, jossa vain ollaan tai kuulutaan, ehkä kannatakaan puhua.

Funktion merkintä avataan seuraavasti: ”Luku $f(a)$ on *funktion f arvo kohdassa a*.” [5, 31.] Kirja käyttää muuttujan arvosta nimitystä kohta. Sanana ”kohta” viittaa hyvin paljon kuvaajaan, jolloin funktion hahmottaminen kuvaajan kautta voimistuu. Ilmaisua ”muuttujan arvo” ei kirjan tässä kohdassa käytetä, vaikka se voisi olla lukujen maailmassa parempi ilmaisu, kuin kohta. Sekaannus muuttujan arvoon ja toisaalta funktion arvoon olisi ilmeinen riski, joten ymmärrän miksi keskitytään kuvaajaan sekä sanoihin kohta ja arvo. Kuitenkin kirjan takaa löytyvässä kertausosiossa kerrotaan, miten ”funktion arvo lasketaan sijoittamalla muuttujan arvo funktion lausekkeeseen” [5, 108]. Kirjasarja esittelee funktion sellaisena asiana, johon liittyy monia nimityksiä ja se selvästi tekee jollekin luvulle jotain sääntönsä mukaan.

Lyhyt Matikka 1 kirjassa merkitykset funktiosta tuotetaan ennen kaikkea kuviokielen avulla kuvaajia tulkitsemalla ja paljon harjoitellaan symbolikielellä erilaisia operaatioita, joita funktioihin liittyy. Minusta käsitteenä funktio jää kuitenkin uskon asteelle, eikä todellista ymmärrystä funktiosta välttämättä synny. Osataan ehkä erilaisia laskuproseduureja liittyen funktioihin ja ymmärretään että se liittyy suureiden välisiin suhteisiin, mutta osaako opiskelija vastata kysymykseen siitä, mikä itsessään funktio on. Epäilen. Itse haluaisin kertoa opiskelijoille, että funktio ei ole sen ihmeellisempi asia, kuin nimitys ilmiölle, jossa kaksi asiaa liittyy toisiinsa tietyn säännön mukaisesti noudattaen kahta lisäehtoa. Näin ollen nämä kaksi asiaa **ovat** siinä ja muodostavat tämän nimetyn ilmiön eli funktion keskenään. Eli varsinaisesti funktio ei ole kone, joka tekee jotain jonkin säännön mukaan, vaan funktioksi nimettyyn ilmiöön liittyy muuttujan arvo (lähtö), lauseke tai sääntö (reitti), joka liittää muuttujan arvon ja funktion arvon (maali) yksikäsitteisesti toisiinsa. Tämä käsitteellinen ”pyörittely” eri nimitysten välillä tuntuu hieman keinotekoiselta ja kenties jopa turhaltakin, mutta samaan aikaan minua mietityttää tietynlainen mystisyys, joka funktioon liittyy. Sen kanssa osataan kenties toimia, mutta epäilen, että sen todellisen luonteen ymmärrys jää useimmille uskon ja muistin asteelle ainakin, jos opiskelee tämän kirjasarjan avulla lukion lyhyttä matematiikkaa.

Kenties esimerkki funktiosta myös muualta kuin lukujen maailmasta, voisi auttaa hahmottamaan funktiota laajemmin. Esimerkkinä tulee mieleen, että kaikilla on biologinen isä. Isä saattaa olla kuollut tai sen kanssa ei olla tekemisissä arjessa, mutta se on silti yksikäsitteisesti olemassa. Näin ollen voidaan muodostaa lapsi-isäsuhteen funktio lapsen suhteen. Muuttuja x (lapsi) valitaan esimerkiksi luokan opiskelijoista. Funktion sääntö on muotoa ”*x:n biologinen isä on*”, jolloin lapsen pariksi kaikista maailman ihmisistä valikoituu hänen oma biologinen isänsä. Nyt oppilas ja hänen biologinen isänsä muodostavat funktion.

MAB3-kurssikirjan valinta olla kertaamatta funktion käsitettä herättää minussa hieman huolta, sillä epäilen, ettei funktion käsite ole opiskelijoille enää ko. kirjan sivulla 90 tuttu juttu. Se on varmaa, että suoria on käsitelty ja niillä osataan operoida, mutta funktio jäi minusta harmillisen vähälle huomiolle MAB1-kurssin jälkeen. Välissä on ollut geometrian kurssi MAB2 ja nyt MAB3-kurssin sivulla 90 ollessaan opiskelijoista saattaa hyvinkin tuntua siltä, että suora ja funktio ovat oikeastaan samoja asioita. Onhan niillä jopa lähes samankaltainen symbolikielen merkitsemistapa: $f(x) = -3x + 7$ ja $y = -3x + 7$. Kirja siis käsittelee suoran yhtälöineen omana asianaan ja tuo sen jälkeen taas mukaa tarkasteluun funktion käsitteen eksponenttifunktioiden kohdalla. Tavallaan ymmärrettävää, mutta toisaalta funktioihin liittyy vahvasti niiden mallintaminen kuvaajina ja edelleen suorat ja niiden yhtälöt, niin olisi ollut myös loogista käyttää tuttua ”tartuntapintaa” enemmän uusien asioiden harjoittelussa ja nojata kurssilla MAB1 aloitettuun työhön. Kirja on uskollinen kirjasarjalleen ja tapa, jolla asiat esitetään, on edelleen hyvin suoraviivainen. Kirja luottaa paljon symbolikieleen sekä luonnolliseen kieleen. Luonnollinen kieli keskittyy paljolti avaamaan symbolikieltä ja sisällöltään se on täynnä matemaattisia käsitteitä, minkä ymmärtäminen voi uskoakseni tuottaa hankaluuksia matematiikkaa vasta harjoittelevalle oppijalle.

Kertoma!

Kertoma!-kirjasarja oli mielestäni näistä sarjoista kansantajuisin ja parhaiten arkielämään kytketty. Lisäksi se oli mielenkiintoisesti kirjoitettu filosofisine pohdintoineen ja jokseenkin lukijoita kosiskeleva niin ulkoasultaan, kuin myös esimerkeiltään jotka liittyivät moneen eri elämän osa-alueeseen ja toisaalta integroi hienosti eri oppiaineita. Esimerkkinä näistä sanottakoon mm. helikopterin matemaattinen malli [7, 22-23], Suomen henkilötunnusjärjestelmä [7, 35], logaritmit ja musiikki [7, 110] sekä legenda jättiläispandan värityksen synnystä [7, 114]. Kirjasarja on matemaattisesti looginen ja ymmärrettävä, mutta samalla jokseenkin leikittelevä ja esittää asiat ns. ”rennolla otteella”. Mielestäni kirjasarja suuntautuu opetuksessaan ulospäin, pois luokkahuoneesta. Kirjasarjan käyttäminen vaatii opettajalta varmasti myös kykyä heittäytyä leikittelemään matemaattisilla ajatuksilla ja toisaalta kirjan rakenne pitkine, monipuolisine teoriaosuuksineen pakottaa resursoimaan aikaa ajattelulle ”tiukan toiminnan” eli standarditehtävien ratkaisemisen sijaan. Kirjan rakenne ei ehkä ole niin tuttu ja turvallinen: teoria-harjoitukset-kotitehtävät -tyyppinen, vaan pikemminkin opettajan tulee itse osata rytmittää pohdintaa, teorian opiskelua ja harjoitustehtäviä. Myös kotitehtäväksi voisi hyvin antaa kirjan ei-rutiininomaisia tutkimustehtäviä, joissa usein on mahdollista löytää useita oikeita vastauksia, kuten esim. Tutkimustehtävä 2 [7, 19], jossa ratkaisijan on keksittävä millaista tilanne seuraava lauseke voisi vastata: $a)\ H(m) = 2{,}5m + 1$. Kirjasarja on siis mielenkiintoinen ja monipuolinen, mutta vaatii opettajalta paneutumista oppikirjan tapaan nähdä matematiikka.

Kuten edellä jo kuvasin, kirjasarjalla on erilainen tapa lähestyä matematiikkaa. Minusta on erittäin tervetullutta ja piristävää, että pysähdytään hetkeksi pohtimaan myös proseduurien, kuten vaikka algoritmin takana olevaa teoriaa ja merkitystä matematiikan kannalta. Tapaa voisi luonnehtia jokseenkin filosofiseksi, jossa ei oteta asioita heti annettuina, vaan annetaan aikaa myös ajatuksen syntymiselle ja lähtökohdaksi otetaan ymmärtäminen toiminnan sijaan.

Kertoma 1! -kirjalla on looginen tapa edetä, mutta suhteessa funktion käsitteeseen, erittäin ytimekäs. Lisäksi kirjan rakenne on sellainen, jossa luvun alussa on laaja teoriaosuus, jossa käydään monta eri asiaa läpi, kuten lauseke muuttujineen ja arvoineen, polynomi lakutoimituksineen ja funktio kuvaajineen. Keskellä teoriaosuutta on muutamia pohdintatehtäviä liittyen juuri kyseiseen teoriaosuuteen. Teoriaosuuden jälkeen harjoitellaan kaikkea sitä edellä kuvattua teoriaa yhden aukeaman verran erinäisin laskutoimituksin, minkä jälkeen seuraa uusi luku. Kirja ei kerro mikä funktio on. Kirja ei myöskään tee funktioon liittyen em. ”filosofista” pohdintaa, vaan esittelee sen lausekkeen ja polynomin luonnollisena jatkeena. Opiskelijalle ei voi kirjan avulla muodostua tarkkaa käsitystä siitä, mikä funktio on, mutta hän kyllä osaa yhdistää siihen lausekkeen ja mahdollisesti myös polynomin. Lisäksi hän osaa piirtää polynomifunktion kuvaajan koordinaatistoon ja selvittää nollakohdat, ts. operoida sillä. Kertoma 1! -kirjassa tehdäänkin oikeastaan vain pieni pintaraapaisu funktioon liittyen.

Kertoma3! -kirja jatkaa funktion osalta siitä, mihin MAB1-kurssin kirja päätyi. Nyt funktio opetetaan täsmällisesti, mutta kirjasarjalle tyypillisellä rennolla otteella aloittaen mm. pohdinnalla kirjojen lukumäärän ja hyllymetrien keskinäistä yhteyttä ja riippuvuutta [7, 24]. Kirja esittää funktion matemaattisesti täsmällisesti ja toisaalta ensimmäinen esimerkki funktion määritelmän jälkeen on suomalaisten ja henkilötunnusten keskinäinen funktio. Eli kieli voi olla matemaattisesti täsmällistä, mutta esimerkkien ei tarvitse olla matematiikan symbolikieltä tai edes lukujen avulla ilmoitettuja. Sen lisäksi, että kirja esittää mielenkiintoisia esimerkkejä, se puhuu opettaessaan mm. nollakohdan käsitettä ennen kaikkea muuttujan arvosta, mikä on matemaattisesti oikeata kieltä. Kirjan tavassa esittää asiat ei ole pelkoa, että ilmaisu, muuttujan arvo sekoittuisi jotenkin ilmaisuun funktion arvo. Kirja osaa esittää asiat loogisesti ja perustellen, mutta samalla monipuolista lukijakuntaa kiinnostavasti.

Pitkä matematiikka

Pitkä SIGMA

Pitkä SIGMA opettaa funktion käsitteen rauhallisesti ja täsmällisesti. Kirjasarjaa voisi luonnehtia loogiseksi ja täsmälliseksi, joka etenee johdonmukaisesti. Tästä kertoo mm. jokaista lukua edeltävä kaavio, josta käy ilmi tulevaa lukua varten tarvittavat pohjatiedot, tulevassa luvussa opeteltavat keskeiset sisällöt sekä sen tiedon, missä tulevan luvun asioita jatkossa käytetään. Tämä auttaa varmasti opiskelijaa jäsentämään käsiteltävää tietoa suhteessa muihin tietoihin, joita hänellä jo on.

Loogisesta tavasta edetä kertoo MAA1-kurssikirjan etenemisjärjestys, kun ensin kerrataan perusasiat, kuten peruslaskutoimitukset. Niiden avulla muodostetaan lauseke ja edelleen yhtälö. Tästä päästään verrannollisuuteen ja edelleen kahden suureen väliseen riippuvuuteen ja sen esittämiseen koordinaatistossa. Nyt ollaankin jo päästy funktioon ilman, että käsitettä on tarvinnut kertaakaan käyttää. Nyt kun on kerätty riittävät pohjatiedot, funktio esitellään ensin yleisesti sääntönä kahden joukon välillä ja tämä asia havainnollistetaan nuolikuviona. Esimerkkeinä on jo ollut luvuilla esitettyjä funktioita lausekkeineen, mutta vasta kuvaajan yhteydessä tehdään oletus, että määrittely- ja arvojoukon alkiot ovat lukuja ja samalla sovitaan x- ja y-koordinaattien merkitykset funktion muuttujana ja arvona. Tämä on siis sopimusasia. Määritelmän yhteydessä funktiosta käytetään ilmaisua ”kuvaus”, mutta tätä ilmaisua ei selitetä. Toki aiemmin on ollut esillä nuolikuvio, joka saattaa auttaa ymmärtämään funktion luonnetta kuvauksena, mutta ilmaisu jää hieman leijumaan ilmaan. MAA1-kurssi opettaa mitä funktion käsite tarkoittaa yleisesti, joten MAA2-kurssi voi täysin paneutua syventämään osaamista ja ymmärrystä liittyen polynomifunktioihin. Kirjasarjan tapa opettaa funktion käsite on suoraviivainen, mutta sen loogisuus ja täsmällisyys tekevät kokonaisuudesta ymmärrettävän ja helposti seurattavan.

Pitkä matematiikka

Pitkä matematiikka -kirjasarja on vertailtavista kirjasarjoista kaikkein eniten ”OPS-maisin”. Kirjasarjassa on tapana ennen ensimmäistä lukua esitellä ote Lukion opetussuunnitelman perusteista 2003 matematiikan ja erityisesti kyseisen kurssin osalta [14, 7; 15, 6]. Otteessa kerrotaan kurssin tavoitteet ja keskeiset sisällöt. Kirja noudattaa opetussuunnitelmaa hyvin tarkasti, mistä hyvänä esimerkkinä on se, ettei MAA1-kurssikirja opeta funktion käsitettä lainkaan, mutta puhuu kuitenkin potenssifunktioista ja eksponenttifunktioista. MAA2-kurssikirja opettaa funktion käsitteen, mutta ei opeta sitä yleisesti vaan opetussuunnitelman mukaisesti polynomifunktiona, jossa määrittelyjoukon ja arvojoukon alkioina on vain lukuja. Funktion yleinen merkitys jää epäselväksi, mutta uskon, että kurssien jälkeen funktioita osataan käsitellä, kuvaajia muodostaa ja nollakohtia ratkaista sujuvasti.

Kuten sanottua, kirjasarja noudattaa opetussuunnitelmaa erinomaisesti, mutta minusta kuitenkin tapa, jolla funktio esitetään on epäselvä, eikä asiaa esitetä opiskelijalle kovinkaan helposti ymmärrettävässä muodossa. Esimerkkinä sanottakoon, että MAA1-kurssilla puhutaan kahden suureen välisestä riippuvuudesta, mutta tämä asia unohdetaan mainita, kun funktion käsitettä määritellään kurssilla MAA2. Mielestäni kirjasarja ei helpota opiskelijan työtä ymmärtää funktio yksikäsitteisenä sääntönä minkä tahansa asioiden välillä, vaan rajaa turhaan tarkastelut koskemaan vain lukuja, jolloin käsitteestä funktio muodostuu hyvin rajattu ja vaikeasti ymmärrettävä kuva jonain matemaattisena oliona, jolle opetellaan tekemään monenlaisia proseduureja. MAA1- ja MAA2-kurssikirjojen välillä ei minusta ole suoranaista siltaa funktion käsitteen opettamisessa, vaan MAA2-kirja toimii itsenäisesti opettaen funktion käsitteen polynomifunktion kautta. Tämä siitä huolimatta, että MAA2-kurssikirjassa luvun alussa [s. 22] muistutetaan MAA1-kurssilla käydyistä funktioista. Heikkous tässä muistutuksessa on, että kun opiskelija ei varmastikaan vielä tiedä mikä funktio perimmäiseltä olemukseltaan on. Enkä itse asiassa ole varma tietääkö hän vielä kurssin jälkeenkään.

Laudatur

Laudatur-kirjasarja tuntuu eniten oppijalähtöiseltä, mikä näkyy kymmenen sivun mittaisella johdannolla yleisesti matematiikkaan, sen opiskelemiseen sekä tuleviin kurssin aiheisiin. Kirja aloittaa yli sivun mittaisella osiolla aiheesta ”Mitä matematiikka on?”. Osiossa käydään läpi mm. matematiikan historiaa n. 30000 eKr lähtien. Lopuksi matematiikan oppimisesta sanotaan, että sille on tyypillistä, ettei uusiin asioihin voi hypätä opettelematta perusasioita [16, 5]. Seuraavaksi on koko aukeaman mittainen ohje opiskelijalle ”Miten opiskella matematiikkaa?”, jonka jälkeen MAA1-kirja esittelee käsitekartan, jonka keskiössä on funktio [16, 8]. Käsitekartta pitää sisällään tiivistetyn tiedon siitä mitä kaikkea funktioon voi liittyä ja selvästi funktion käsite nostetaan kurssin keskiöön. Vielä ennen varsinaista kurssiosuutta, kirjassa on ”Testaa lähtötaitosi” -osio, jonka jälkeen alkaa luku 1.

Kirjasarja käyttää selvästi eniten luonnollista kieltä verrattuna muihin kirjasarjoihin ja kirjaa voisikin luonnehtia sanoilla monisanainen ja runsas. Tätä kuvastaa paitsi edellä kuvaamani kymmenen sivun johdanto, mutta myös jokaisen luvun alussa oleva pieni johdanto ko. aiheeseen. Tämä esitetään usein historian kautta kertomalla kuinka kyseisen matematiikan osa-alue on kehittynyt vuosisatojen tai jopa vuosituhansien aikana. Lisäksi runsassanaisen teoriaosuuden jälkeen on ns. PS-osio, jossa on esitetty jokin aiheeseen liittyvä mielenkiintoinen pulma.

Kirjasarjaa lukiessa tulee tunne, ettei kirjassa ole kiire mihinkään, vaan asiat käydään todella suurella pieteetillä perusteellisesti johdattelemalla aiheeseen ja kertomalla mitkä tulevat olemaan luvun keskeiset asiat. Tämän jälkeen seuraa johdonmukainen, loogisesti etenevä teoriaosuus, joka lopuksi kiteytetään täsmälliseksi, matemaattiseksi määritelmäksi. Tämän jälkeen seuraa perinteisiä harjoituksia liittyen opiskeltavaan aihealueeseen.

Funktion käsitteen kirjasarja opettaa edellä kuvaamani tyypilliseen tapaansa rauhallisesti, monipuolisesti ja runsaalla luonnollisella kielellä. Kuitenkin kirjasarja on tehty taidolla, joten asiat ovat runsaudesta huolimatta osattu esittää selkeästi. Kirjasarja ei sano, että funktio on kone, vaan kertoo, että sitä voidaan verrata koneeseen jonne syötetään jotain ja saadaan tuloksena jotain uutta. Tätä vertauskuvaa käytetään vain yhden virkkeen verran aivan funktion käsitteen opettamisen alussa, joten mielikuva ei rajoitu funktiosta koneena, joka tekee asioita. Kirjasarja lähestyy funktiota spiraalinomaisesti aloittaen hieman kauempaa, mutta kokoajan lähestyen määrätietoisesti kohti funktion käsitteen ydintä ja matemaattisesti täsmällistä määritelmää. Matemaattinen määritelmä kestää vertailun jopa yliopistomatematiikkaan saakka, niin sanavalinnoiltaan kuin myös merkintätavoiltaan.

7 FUNKTIO VUODEN 2015 OPETUSSUUNNITELMASSA

Uudessa lukion opetussuunnitelmassa matematiikan opiskelu alkaa kaikille yhteisellä kurssilla Luvut ja lukujonot (MAY1). Tämän kurssin keskeisinä asioina on mm. lukuihin liittyen reaaliluvut, peruslaskutoimitukset ja prosenttilaskenta. Funktiota koskien funktion käsite sekä kuvaajan piirto ja tulkinta. Myös lukujonot lukeutuvat kurssin keskeiseen sisältöön. Tavoitteista mainitaan, että kurssin tulisi kerrata ja täydentää lukualueet, kerrata peruslaskutoimitukset ja prosenttilaskennan periaatteet. Lisäksi kurssin tavoite on, että opiskelija vahvistaa ymmärrystään funktion käsitteestä ja ymmärtää lukujonon käsitteen sekä osaa määrittää lukujonoja, kun annetaan alkuehdot ja tapa, jolla seuraavat termit muodostetaan. [11, 130.] Kurssi toimii siis kertauskurssina ja antaa kaikille mahdollisuuden peruskoulun jälkeen tai siitä huolimatta pohtia valitseeko lyhyen vaiko pitkän matematiikan.

Lyhyt matematiikka

Kaikille yhteisen kurssin MAY1 jälkeen lyhyessä matematiikassa tulee kurssi Lausekkeet ja yhtälöt (MAB2). Kurssin nimi on sama kuin 2003 vuoden opetussuunnitelman kurssi MAB1 ja kurssin tavoitteissa uutta on uudessa opetussuunnitelmassa vain, että opiskelijan tulisi osata käyttää teknisiä apuvälineitä polynomifunktion tutkimisessa ja polynomiyhtälöihin sekä polynomifunktioihin liittyvien sovellusongelmien ratkaisussa [11, 37]. Keskeiset sisällöt ovat täysin vastaavat molemmissa opetussuunnitelmissa. MAY1-kurssilla perehdyttiin lukuihin, peruslaskutoimituksiin sekä funktion käsitteeseen ja nyt MAB2-kurssilla keskitytään suureiden väliseen riippuvuuteen ja yhtälöihin.

Lyhyen matematiikan kolmas kurssi on Geometrian kurssi, mutta MAB4 sen sijaan on nimetty samoin, kuin nykyisen opetussuunnitelman MAB3-kurssi Matemaattisia malleja. Tavoitteiltaan ja sisällöltään kurssit ovat likipitäen samat. Tavoitteisiin on lisätty vuoden 2003 opetussuunnitelmaan verrattuna, että opiskelija tutustuu ennusteiden tekemiseen mallien pohjalta sekä osaa käyttää teknisiä apuvälineitä polynomi- ja eksponenttifunktion ominaisuuksien tutkimisessa sekä polynomi- ja eksponenttiyhtälöiden ratkaisussa sovellusongelmien yhteydessä [11, 137]. Keskeisiin sisältöihin oli lisätty lukujonot matemaattisina malleina [11, 138].

Lyhyen matematiikan osalta opetussuunnitelman vaihdos näyttäisi muuttavan funktion käsitteen opetusta oikeastaan vain vähän. Suurin muutos lienee se, että aiemmin kun MAB1-kurssi Lausekkeet ja yhtälöt ja MAB3-kurssi Matemaattisia malleja pitivät huolen funktion käsitteen opettamisesta, niin uudessa opetussuunnitelmassa funktiosta puhuvat kurssit MAY1, MAB2 ja MAB4. Eli vanhan MAB1-kurssin sisältö funktion osalta on jakaantunut kahdelle eri kurssille. Aiemman opetussuunnitelman MAB1-kurssikirjat pitivät sisällään myös kertauksen mm. lukujoukoista, niin nyt tämän kertaavan osion hoitaa yhteinen MAY1-kurssi. Näin ollen aikaa luultavasti jää enemmän mm. lausekkeiden ja suureiden välisen riippuvuuden tarkasteluun MAB2-kurssilla. Toki funktion käsite käydään läpi jo MAY1-kurssilla, joten nähtäväksi jää, kuinka uuden opetussuunnitelman mukaiset lukion lyhyen matematiikan kurssikirjat oikeastaan rakentavat funktion käsitteen. SIGMA-kirjasarjahan esitteli funktion käsitteen MAB3-kurssilla, mikä tarkoittaisi 2015 opetussuunnitelmassa vasta MAB4-kurssia (ks. luku. 3.1). Tämän tutkimuksen mielenkiintona on funktion käsitteen opettaminen, ei niinkään sen pidemmälle etenevä tarkastelu mitä kaikkea muuta funktioon liittyen opetetaan. Kuitenkin vuosien 2003 ja 2015 opetussuunnitelmia tarkastellessani huomasin, että aikaisemmassa opetussuunnitelmassa pakollisena kurssina ollut MAB4 Matemaattinen analyysi on uudessa opetussuunnitelmassa ensimmäisenä valtakunnallisena syventävänä kurssina MAB7. Näin ollen vaikuttaisi siltä, että uudessa opetussuunnitelmassa on opetusta haluttu funktion osalta painottaa käsitteen muodostukseen ja perusasioihin.

Pitkä matematiikka

Kaikille yhteisen MAY1-kurssin jälkeen lukion pitkän matematiikan seuraava kurssi on MAA2 Polynomifunktiot ja -yhtälöt. Kurssin tavoitteet vastaavat hyvin pitkälti 2003 opetussuunnitelman MAA2 Polynomifunktiot -kurssia. Kuitenkin isona erona kursseissa on seuraava sanavalinta oppimista kuvaavan verbin kohdalla. Kun vuoden 2003 opetussuunnitelmassa puhuttiin oppimisesta [2, 119], puhuu uusi 2015 opetussuunnitelma osaamisesta [11, 131], mikä tarkoittaa olennaisesti sitä, että taito on pitänyt oppia ennen sen osaamista. Eli vuoden 2015 opetussuunnitelman tavoitteet ovat korkeammalla.

Samoin, kuin vuoden 2003 opetussuunnitelmassa, kurssin tavoitteeksi on asetettu, että opiskelija harjaantuu käsittelemään polynomifunktioita. Lisäksi opiskelijan tulisi osata ratkaista toisen asteen polynomiyhtälöitä ja tutkia ratkaisujen lukumäärää, osata ratkaista korkeamman asteen polynomiyhtälöitä, jotka voidaan ratkaista ilman polynomien jakolaskua sekä osata ratkaista yksinkertaisia polynomiepäyhtälöitä. Ainoa kokonaan uusi tavoite vuoden 2003 opetussuunnitelmaan verrattuna on, että opiskelijan tulisi MAA2-kurssin jälkeen osata käyttää teknisiä apuvälineitä polynomifunktion tutkimisessa ja polynomiyhtälöihin ja polynomiepäyhtälöihin sekä polynomifunktioihin liittyvien sovellusongelmien ratkaisussa. Kurssin keskeiset sisällöt ovat samat kuin vuoden 2003 opetussuunnitelmassa (ks. luku 4). [11, 131.]

Pitkän matematiikan osalta funktion käsitteen opetus muuttuu siten, että vuoden 2003 opetussuunnitelman mukaan MAA1 Funktiot ja yhtälöt kurssin tavoitteissa sanottiin, että opiskelija syventää funktiokäsitteen ymmärtämistä tutkimalla potenssi- ja eksponenttifunktioita [2, 119]. Vuoden 2015 opetussuunnitelma listaa MAY1 Luvut ja lukujonot -kurssin tavoitteeksi, että opiskelija vahvistaa ymmärrystään funktion käsitteestä [11, 130]. Opetussuunnitelmia tarkastellen ja sen asian huomioon ottaen, että MAY1-kurssin lukee sekä tulevat lyhyen - että pitkän matematiikan opiskelijat, näyttäisi siltä, että funktion käsitteeseen lähestytään rauhallisemmin vuoden 2015 opetussuunnitelmassa. Uskoisin myös, että funktion käsitteen oppiminen ja edelleen ymmärtäminen on varmemmalla pohjalla pitkän matematiikan osalta uuden opetussuunnitelman mukaisella kurssijaolla. Tätä tulkintaa tukee myös ensimmäisten kurssien vertailu keskeisten sisältöjen kohdalta, kun vuoden 2003 opetussuunnitelmassa puhutaan potenssi- ja eksponenttifunktiosta [2, 119] niin vuoden 2015 opetussuunnitelmassa puhutaan funktiosta itsessään muiden keskeisten sisältöjen ohella [11, 130].

8 LÄHTEET

[1] Merikoski, J. Virtanen, A. & Koivisto, P. (2004) Johdatus diskreettiin matematiikkaan, Porvoo: WSOY

[2] OPH (2003) Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003, Nuorille tarkoitetun lukiokoulutuksen opetussuunnitelman perusteet, Vammala: Vammalan kirjapaino Oy

[3] Hella Lauri (2011) Joukko-opin luentomoniste syksy 2011, Tampereen Yliopisto, Informaatio-tieteiden yksikkö
Internetlähde: http://www.sis.uta.fi/~klkelu/kurssit/joukko-oppi/JO2011.pdf (tark. 15.4.2016)

[4] Sanoma Pro, SIGMA 3 Matemaattisia malleja 1 -oppikirjan kustantajan internetsivu: https://www.sanomapro.fi/sigma-3-matemaattisia-malleja-i (tark. 16.5.2016]

[5] Aalto, A. Kangasaho, J. Kylliäinen, O. Metiäinen, A. Mäkinen, J. Tahvanainen, J. (2013) Lyhyt Matikka 1 Lausekkeet ja yhtälöt, Helsinki: Sanoma Pro Oy, 2013

[6] Aalto, A. Kangasaho, J. Kylliäinen, O. Metiäinen, A. Mäkinen, J. Tahvanainen, J. (2015) Lyhyt Matikka 3 Matemaattisia malleja 1, Helsinki: Sanoma Pro Oy, 2015

[7] Parmanen, K. Portaankorva-Koivisto, P. Sirviö, S. (2009) Kertoma 3! Matemaattisia malleja 1 MAB3, Keuruu: Otavan Kirjapaino Oy, 2009, Otava

[8] Ekonen, M. Hassinen, S. Hemmo, K. & Taskinen, T. (2009) SIGMA 1 Lausekkeet ja yhtälöt, Keuruu: Otavan Kirjapaino Oy, 2009, Tammi

[9] Parmanen, K. Portaankorva-Koivisto, P. Sirviö, S. (2008) Kertoma 1! Lausekkeet ja yhtälöt MAB1, Keuruu: Otavan Kirjapaino Oy, 2008, Otava

[10] Ekonen, M. Hassinen, S. Hemmo, K. & Taskinen, T. (2011) SIGMA 3 Matemaattisia malleja 1, Livonia Print, Latvia, 2011, Tammi

[11] OPH (2015) Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015, Nuorille tarkoitetun lukiokoulutuksen opetussuunnitelman perusteet. Internetlähde (tarkastettu 29.4.2016): http://www.oph.fi/download/172124_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015.pdf

[12] Alatupa, S. Hassinen, S. Hemmo, K. Leikas, M & Taskinen, T. (2014) Pitkä SIGMA 1 Funktiot ja yhtälöt, Helsinki: Sanoma Pro Oy, 2014

[13] Alatupa, S. Hassinen, S. Hemmo, K. Leikas, M. Taskinen, T. & Tolonen, T. (2014) Pitkä SIGMA 2 Polynomifunktiot, Helsinki: Sanoma Pro Oy, 2014

[14] Kangasaho, J. Mäkinen, J. Oikkonen, J. Paasonen, J. Salmela, M. & Tahvanainen, J. (2015) Pitkä matematiikka 1 Funktiot ja yhtälöt, Helsinki: Sanoma Pro Oy, 2015

[15] Kangasaho, J. Mäkinen, J. Oikkonen, J. Paasonen, J. Salmela, M. & Tahvanainen, J. (2014) Pitkä matematiikka 2 Polynomifunktiot, Helsinki: Sanoma Pro Oy, 2014

[16] Hautajärvi, T. Ottelin, J. & Wallin-Jaakkola, L. (2005) Laudatur 1 Funktiot ja yhtälöt, Keuruu: Otavan Kirjapaino Oy, 2005, Otava

[17] Hautajärvi, T. Ottelin, J. & Wallin-Jaakkola, L. (2005) Laudatur 2 Polynomifunktiot, Keuruu: Otavan Kirjapaino Oy, 2005, Otava

[18] Tieteen termipankki: Kirjallisuudentutkimus: funktio. Internetlähde (tarkastettu 19.05.2016): http://www.tieteentermipankki.fi/wiki/Kirjallisuudentutkimus:funktio